

2 Gränsvärden och kontinuitet

2.1 Inledning

Gränsvärdesbegreppet är grundläggande inom den del av matematiken som brukar kallas analys. Definitionen av övriga grundbegrepp i analysen som kontinuitet, derivata och integral bygger på begreppet gränsvärde. Den första definitionen av gränsvärde gjordes omkring 1760 av den franske matematikern d'Alembert och den nuvarande definitionen infördes på 1820-talet av hans landsman Cauchy. Denna definition är dock rätt så abstrakt. Vi kommer därför att i avsnitt 2.2 och 2.3 till stor del att förlita oss på intuitiva och därmed i viss mån oprecisa resonemang. Istället för att ge precisa definitioner av gränsvärdesbegreppet gör vi beskrivningar i termer som vi inte gett någon exakt mening. I avsnitt 2.10 ger vi en kortfattad, men stringent, behandling av gränsvärdesbegreppet som bygger på precisa definitioner.

2.2 Gränsvärde av en funktion då $x \rightarrow \infty$ eller $-\infty$, gränsvärde av en talföljd

Exempel 2.1 Betrakta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. För stora x är $\frac{1}{\sqrt{x}}$ litet. Exempelvis gäller att

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{100} \text{ för alla } x > 10000,$$

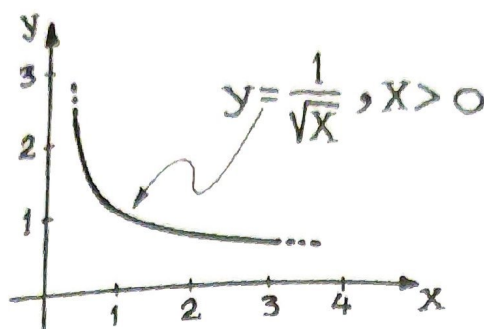
$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{1000} \text{ för alla } x > 1000000,$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{10000} \text{ för alla } x > 10^8 \text{ osv.}$$

Tydligen gäller att man kan få $1/\sqrt{x}$ att bli *godtyckligt litet*, dvs. mindre än vilket som helst på förhand givet tal genom att välja x *tillräckligt stort*. Vi uttrycker detta genom att säga att $1/\sqrt{x}$ har gränsvärdet noll då x går mot oändligheten och skriver

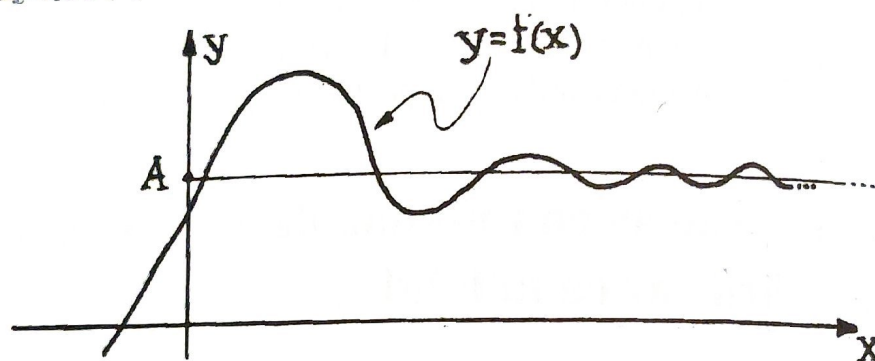
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ eller } \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

(Utläses: "limes av $1/\sqrt{x}$, då x går mot oändligheten, är noll" respektive " $1/\sqrt{x}$ går mot noll, då x går mot oändligheten").



Låt nu f vara en funktion som är definierad för alla tillräckligt stora x , dvs i något intervall av typen (a, ∞) eller $[a, \infty)$. Vi gör följande *provisoriska* definition.

Definition 2.1 Funktionen f sägs ha gränsvärdet A , då x går mot oändligheten, om det går att få $f(x)$ att ligga godtyckligt nära A för alla tillräckligt stora x . Detta skrivs: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ eller $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$.



Ovanstående definition innehåller vissa opreciserade begrepp, nämligen "godtyckligt nära" och "tillräckligt stora x ". I avsnitt 2.10 diskuterar vi innebörden av dessa begrepp och där återfinns även bevis för vissa av satserna i detta kapitel.

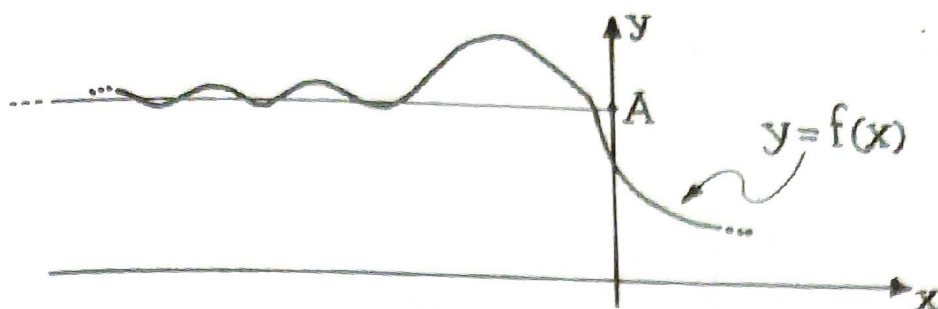
Exempel 2.2 Bestäm $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{\sqrt{x}})$.

Lösning: I exempel 2.1 fann vi att det gick att få $1/\sqrt{x}$ att bli godtyckligt litet för alla tillräckligt stora x . Detta innebär att man kan få $2 + 1/\sqrt{x}$ att ligga godtyckligt nära 2 för alla tillräckligt stora x , dvs. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{\sqrt{x}}) = 2$.

Man kan också vara intresserad av hur en funktion "uppför sig" för stora negativa tal x , dvs. av gränsvärdet av f då x går mot minus oändligheten. Definitionen av detta gränsvärde är analog med definitionen av $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Att $f(x)$ går mot A , då x går mot minus oändligheten, skrivs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ eller } f(x) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow -\infty.$$

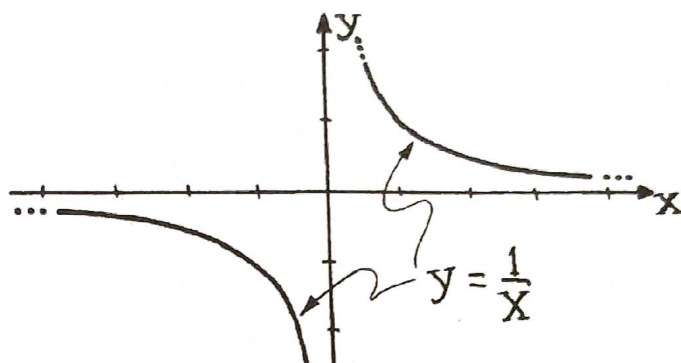
2.2 Gränsvärde av en funktion då $x \rightarrow \infty$ eller $-\infty$, gränsvärde av en talföljd



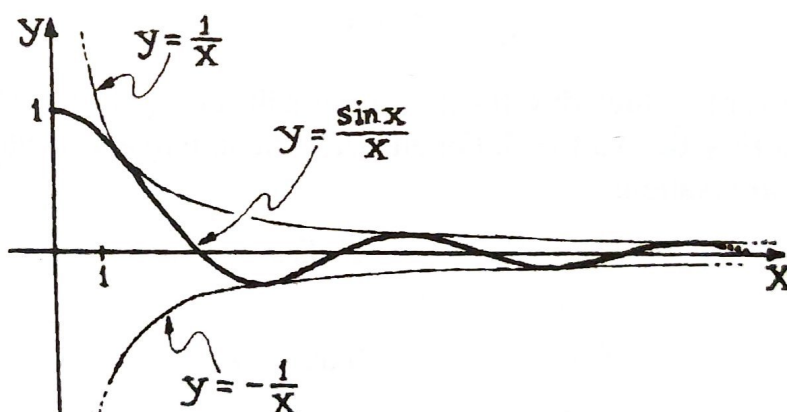
Om $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$ eller då $x \rightarrow -\infty$ sägs linjen $y = A$ vara en horisontell asymptot till kurvan $y = f(x)$.

Exempel 2.3 Bestäm gränsvärdet av $\frac{1}{x}$ då $x \rightarrow \infty$ och då $x \rightarrow -\infty$.

Lösning: Vi inser att $1/x$ blir litet när x blir stort och genom att välja x tillräckligt stort kan vi få $1/x$ att bli hur litet som helst, dvs. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$. Analogt inser man att $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) = 0$.



Exempel 2.4 Bestäm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

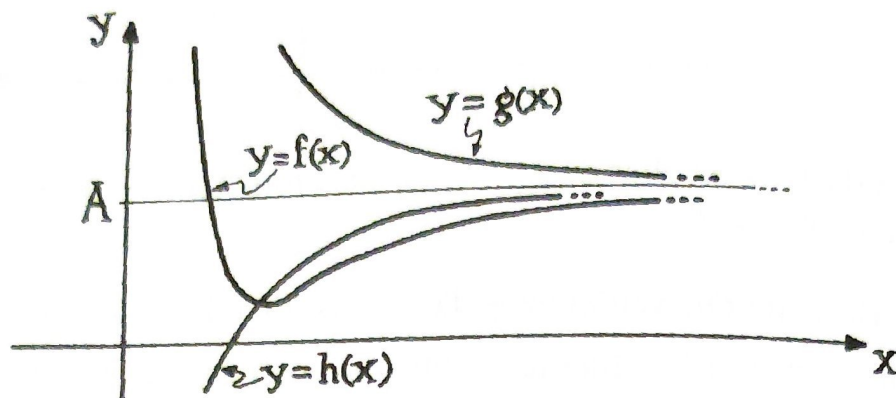


Lösning: Eftersom $-1 \leq \sin x \leq 1$ följer att

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

för alla $x > 0$. Eftersom både $-1/x$ och $1/x$ går mot noll då $x \rightarrow \infty$ måste tydligen också $\frac{\sin x}{x}$ gå mot noll då $x \rightarrow \infty$, dvs. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. I exempel 2.4 har vi utnyttjat följande intuitivt "självklara" sats som bevisas i avsnitt 2.10.

Sats 2.1 (Instängningssatsen). Antag att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$ och att $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ för alla tillräckligt stora x . Då gäller att $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A$.



Exempel 2.5 Vad händer med $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} - x$ då x växer obegränsat?

Lösning: Uppenbarligen gäller att $\sqrt{x^2 + 6x}$ blir stort när x blir stort. Det är därför svårt att direkt säga någonting om differensen $\sqrt{x^2 + 6x} - x$ för stora x . Vi gör därför först en algebraisk omformulering av uttrycket för $f(x)$ ("förlängning med konjugatkvantiteten"). Om $x > 0$ får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 6x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - x)(\sqrt{x^2 + 6x} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \\ &= (\text{konjugatregeln}) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \\ &= (\text{division}) = \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{x}} + 1}. \end{aligned}$$

Om x är stort så är $6/x$ litet, dvs. för stora x bör gälla att $f(x) \approx 3$. Vi gissar därför att $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) = 3$. För att visa detta utnyttjar vi instängningssatsen samt följande observation:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow A \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \Updownarrow \\ |f(x) - A| &\rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Vi undersöker alltså $|f(x) - 3|$, dvs.

$$\begin{aligned} |\sqrt{x^2 + 6x} - x - 3| &= \left| \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - (3 + x))(\sqrt{x^2 + 6x} + (3 + x))}{\sqrt{x^2 + 6x} + 3 + x} \right| = \\ &= (\text{konjugatregeln}) = \frac{9}{|\sqrt{x^2 + 6x} + 3 + x|}. \end{aligned}$$

Av detta följer genast att för $x > 0$ så är

$$0 \leq \left| \sqrt{x^2 + 6x} - x - 3 \right| \leq \frac{9}{x}.$$

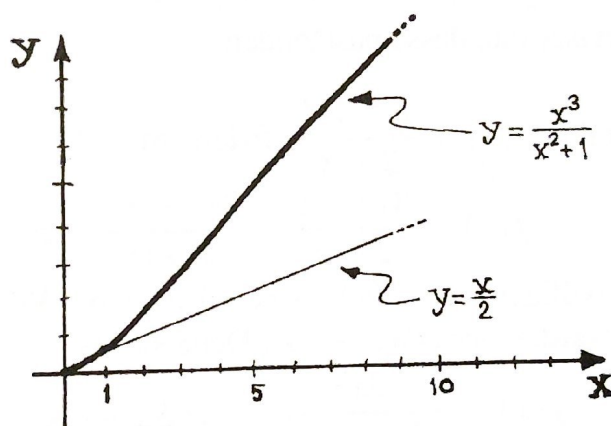
Eftersom $9/x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ så får vi då med hjälp av instängningssatsen att $\sqrt{x^2 + 6x} - x \rightarrow 3$ då $x \rightarrow \infty$.

Det är inte alla funktioner som har ett gränsvärde då $x \rightarrow \infty$. Anledningen till detta kan t.ex. vara att funktionsvärdena oscillerar utan att närma sig något bestämt tal eller att funktionsvärdena växer över alla gränser då $x \rightarrow \infty$.

Exempel 2.6 Har $\cos x$ något gränsvärde då $x \rightarrow \infty$?

Lösning: Eftersom det finns godtyckligt stora tal för vilka $\cos x$ antar värdena 1 och -1 ($x = n \cdot 2\pi$ respektive $x = \pi + n \cdot 2\pi$) kan $\cos x$ inte närma sig något bestämt tal då $x \rightarrow \infty$. Detta innebär att $\cos x$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow \infty$.

Exempel 2.7 Betrakta $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. Undersök vad som händer då x växer obegränsat, dvs. då $x \rightarrow \infty$.



Lösning: Om $x \geq 1$ så är

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} \geq \frac{x^3}{x^2 + x^2} = \frac{x}{2}.$$

Detta innebär att vi kan få $f(x)$ att bli hur stort som helst genom att välja x tillräckligt stort. Vill vi att $f(x) > 100000$ så räcker det att ta $x > 200000$ och vill vi att $f(x) > 10^6$ så räcker det att ta $x > 2 \cdot 10^6$. Funktionsvärdena närmar sig alltså inget bestämt tal då $x \rightarrow \infty$, dvs. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$ *existerar inte*. Eftersom $f(x)$ växer över alla gränser då $x \rightarrow \infty$ säger man att f har det *oegentliga gränsvärdet* oändligheten då $x \rightarrow \infty$. Detta skrivs

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Skrivsättet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \infty$$

förekommer också, trots att $\frac{x^3}{x^2+1}$ inte närmar sig något bestämt tal då $x \rightarrow \infty$.

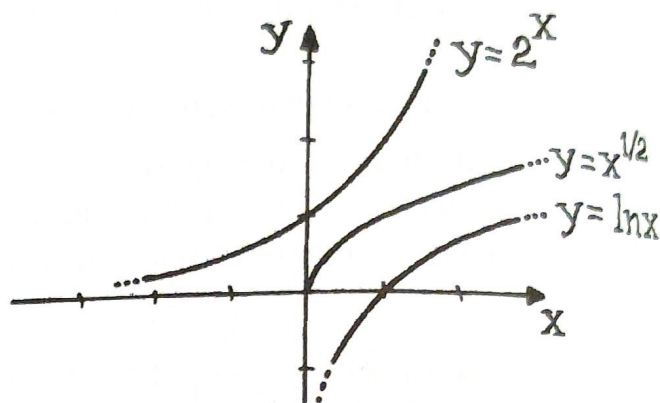
Den formella definitionen av innebörden i uttryck av typen $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow -\infty$ ger vi i avsnitt 2.10.

Exempel 2.8 Då $x \rightarrow \infty$ gäller

$$\ln x \rightarrow \infty,$$

$$x^a \rightarrow \infty \text{ om } a > 0,$$

$$a^x \rightarrow \infty \text{ om } a > 1.$$



Exempel 2.9 Vi bevisar inte dessa påståenden.

Exempel 2.10 Betrakta $f(x) = \frac{1 - 3x^2}{2 + x}$. Eftersom

$$-f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2 + x} > \frac{3x^2 - x^2}{x + x} = x$$

för $x > 2$ så gäller tydligen att $-f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$. Vi säger därför att f har det oegentliga gränsvärdet $-\infty$, då $x \rightarrow \infty$. Detta skrivs

$$f(x) = \frac{1 - 3x^2}{2 + x} \rightarrow -\infty, \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

2.2.1 Räkneregler

Antag att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ och att $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$. Detta innebär väsentligen att för stora x ligger $f(x)$ nära A och $g(x)$ nära B . För stora x gäller alltså att

$$Cf(x) \text{ ligger nära } CA,$$

$$f(x) + g(x) \text{ ligger nära } A + B,$$

$$f(x)g(x) \text{ ligger nära } AB,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ ligger nära } \frac{A}{B} \text{ (om } B \neq 0).$$

Följande sats är därför ingen överraskning.

Sats 2.2 (Räkneregler för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$.) Om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$ så gäller

- I. $\lim_{x \rightarrow \infty} C f(x) = C A$ för varje tal C ,
- II. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = A + B$,
- III. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = AB$,
- IV. Om $B \neq 0$ så är $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Motsvarande räkneregler gäller för gränsvärden då $x \rightarrow -\infty$.

Bevis: Se avsnitt 2.10 (Sats 2.15, sid. 135).

Genom en upprepad användning av räknereglerna I-IV samt instängningsatsen kan man ofta återföra beräkningen av ett komplicerat gränsvärde på beräkningen av ett eller flera sk. *standardgränsvärden*, vilka härletts en gång för alla. Detta gör att man endast i undantagsfall behöver använda gränsvärdesdefinitionen vid gränsvärdesbestämningar. I avsnitt 2.9 finns en sammanställning av de standardgränsvärden som vi kommer att behandla i detta kapitel. Det enklaste av dessa standardgränsvärden har vi redan diskuterat, nämligen gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. (Se exempel 2.3.)

Exempel 2.11 Om n är ett positivt heltal så gäller $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Detta följer av att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ samt räkneregeln III. Genom att använda denna så får vi nämligen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

och upprepad användning ger $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Anmärkning: Ett liknande resonemang som i exempel 2.11 visar att räknereglerna II och III kan utsträckas till att gälla för en summa respektive produkt av *ändligt* många funktioner. Allmänt gäller alltså att gränsvärdet av en summa är lika med summan av gränsvärdena och gränsvärdet av en produkt är lika med produkten av gränsvärdena.

Anmärkning: Genom att använda definitionen av gränsvärde kan man visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0 \text{ om } a > 0.$$

Det är alltså inte väsentligt att exponenten är ett heltal.

Exempel 2.12 Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 11x^2 - 7}{7x^3 - 4x + 3}$

Lösning: Vi kan inte direkt tillämpa räkneregeln III eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 11x^2 - 7)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} (7x^3 - 4x + 3)$ inte existerar. Vi bryter därför ut den term som växer snabbast i täljaren respektive nämnaren för stora x , dvs. x^3 , och får för $x \neq 0$

$$\frac{2x^3 + 11x^2 - 7}{7x^3 - 4x + 3} = \frac{x^3 \left(2 + \frac{11}{x} - \frac{7}{x^3}\right)}{x^3 \left(7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)} = \frac{2 + \frac{11}{x} - \frac{7}{x^3}}{7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}.$$

Av räkneregeln II följer att

$$2 + \frac{11}{x} - \frac{7}{x^3} \rightarrow 2 + 0 - 0 = 2 \text{ då } x \rightarrow \infty,$$

$$7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \rightarrow 7 - 0 + 0 = 7 \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Räkneregeln IV ger då att det sökta gränsvärdet är $2/7$.

Den allmänna metoden att bestämma gränsvärden av typen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ är just att bryta ut den snabbast växande termen i täljaren respektive nämnaren och sedan använda räknereglerna för gränsvärden. För att kunna göra detta måste man dock veta vilka funktioner som växer snabbast då $x \rightarrow \infty$. Exempelvis gäller ju att $\sqrt{x}$ och $\ln x$ båda går mot oändligheten då $x \rightarrow \infty$. För att bestämma gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ måste vi alltså veta vilken av funktionerna $\sqrt{x}$ och $\ln x$ som växer snabbast då $x \rightarrow \infty$. I avsnitt 2.7 kommer vi att ge en "rankinglista" för funktioner av olika typer då $x \rightarrow \infty$.

2.2.2 Gränsvärde av en talföljd

Vi har hittills endast betraktat gränsvärden av funktioner. Gränsvärdet av en talföljd $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, dvs. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ definieras analogt med gränsvärdet av en funktion f då $x \rightarrow \infty$. Om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar så sägs talföljden vara *konvergent*. Existerar inte gränsvärdet så sägs talföljden vara *divergent*. Räknereglerna för gränsvärden (Sats 2.1 och Sats 2.2) gäller även för gränsvärden av talföljder.

Exempel 2.13 Undersök om $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$ existerar.

Lösning: Vi observerar att

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

enligt formeln för en aritmetisk talföljds summa. (Se sid. 27.)
Alltså är

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}.$$

Räknereglerna för gränsvärden ger nu att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Exempel 2.14 Om $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$ så ligger $f(x)$ "nära" A för alla stora tal x . Speciellt måste då gälla att $f(x)$ ligger "nära" A för alla stora positiva heltal n , dvs. om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ så är också $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$.

Omvändningen gäller dock inte, vilket vi visar genom att välja $f(x) = \sin \pi x$. Eftersom $f(n) = \sin \pi n = 0$ för varje heltal n är även $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$. Däremot existerar inte $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \pi x$. (Varför?)

2.2.3 Några viktiga gränsvärden

Följande gränsvärden kommer ofta till användning.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{om } |a| < 1, \\ 1 & \text{om } a = 1, \\ \infty & \text{om } a > 1 \end{cases} \quad (\text{oegentligt gränsvärde}).$$

Om $a \leq -1$ så saknas både egentligt och oegentligt gränsvärde.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ för varje } a.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ om } a > 0.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bevis:

1. Eftersom gränsvärdet i 1. är intuitivt "självkänt" hoppar vi över beviset av detta.

2. Låt N vara ett fixt heltal större än $|a|$. Om $n > N$ gäller

$$0 \leq \frac{|a|^n}{n!} = \left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{N-1} \right) \left(\frac{|a|}{N} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{n} \right) \leq \frac{|a|^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{|a|}{n}$$

$$(\text{ty } \frac{|a|}{m} < 1, \text{ för } m = N, N+1, \dots)$$

Eftersom

$$\frac{|a|^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{|a|}{n} \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

följer nu påståendet av instängningssatsen.

Anmärkning: Enligt 1. gäller att $a^n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$ om $a > 1$. Vi säger att fakultetsfunktionen växer snabbare mot oändligheten än varje exponentialfunktion.

3. Vi betraktar först fallet $a > 1$. Vi kan då sätta $\sqrt[n]{a} = 1 + p_n$ där $p_n > 0$. Alltså är (enligt binomialsatsen)

$$a = (1 + p_n)^n = 1 + np_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot p_n^2 + \dots + p_n^n \geq np_n.$$

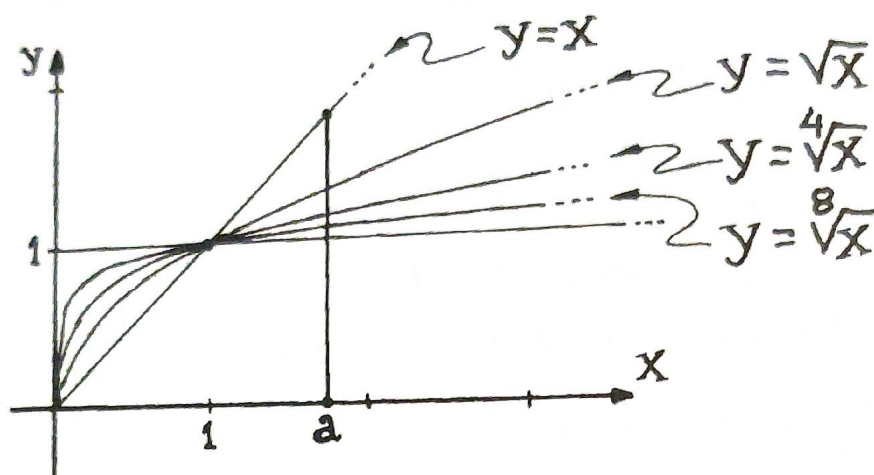
Detta ger att $0 < p_n \leq a/n$ och då $a/n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ följer påståendet av instängningssatsen för det fall då $a > 1$.

Om $a = 1$ så är $\sqrt[n]{a} = 1$ för alla n , vilket medför att även gränsvärdet $= 1$.

Om $0 < a < 1$ så är $1/a > 1$ varför $\sqrt[n]{1/a} \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$. Eftersom

$$\sqrt[n]{a} = 1 / \sqrt[n]{1/a}$$

får vi att $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$ även i detta fall.



4. Kan visas på liknande sätt som 3. Vi väntar dock med beviset till avsnitt 2.7 (exempel 2.55).

Exempel 2.15 Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + n}$.

Lösning: Vi gör en instängning. För alla positiva heltal n gäller

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{3n^2 + n} \leq \sqrt[n]{3n^2 + n^2} = \sqrt[n]{4} \cdot (\sqrt[n]{n})^2.$$

Standardgränsvärdena 3. och 4. samt räkneregeln för gränsvärdet av en produkt visar att de båda ytterleden i olikheten går mot 1 då $n \rightarrow \infty$. Instängningssatsen ger då resultatet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + n} = 1.$$

2.2.4 Oegentliga gränsvärden

Räkneregler för gränsvärden gäller i allmänhet inte för oegentliga gränsvärden. Detta beror på att $-\infty$ och ∞ inte är tal.

Exempel 2.16 Vi har att

$$x^2 \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ och } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Av detta följer inte att

$$\frac{1}{x^2} \cdot x^2 \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0 \text{ ty } 0 \cdot \infty$$

är inte definierat. I själva verket är ju $\frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1$ varför gränsvärdet är 1.

Man kan dock visa att bl.a. följande enkla regler gäller för räkning med oegentliga gränsvärden.

1. $\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \\ g(x) \rightarrow B \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty,$
2. $\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \\ g(x) \rightarrow B \neq 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)g(x) \rightarrow \begin{cases} \infty \text{ om } B > 0 \\ -\infty \text{ om } B < 0 \end{cases},$
3. $|f(x)| \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty,$
4. $\left. \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \text{ för } x \geq a \\ g(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty.$

Motsvarande regler gäller för fallet $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$, samt för oegentliga gränsvärden då $x \rightarrow -\infty$.

Exempel 2.17 Visa att $p(x) = x^3 - 100x^2 + 17x + 1 \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.

Lösning: Vi kan skriva

$$p(x) = x^3 \left(1 - \frac{100}{x} + \frac{17}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = x^3 g(x)$$

där

$$g(x) = 1 - \frac{100}{x} + \frac{17}{x^2} + \frac{1}{x^3} \rightarrow 1 > 0 \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Eftersom $x^3 \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ följer av detta att $p(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.

2.3 Gränsvärde av en funktion då $x \rightarrow x_0$

Låt f vara en funktion och x_0 en given punkt. Vi ska diskutera vad som bör menas med

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

dvs. gränsvärdet av f då $x \rightarrow x_0$. Grovt uttryckt kan man säga att om $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ så innebär detta att $f(x)$ ligger nära A då x ligger nära x_0 .

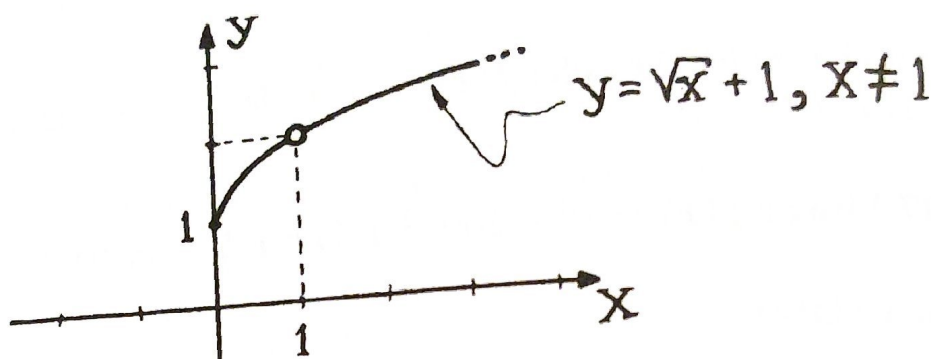
Exempel 2.18 Betrakta $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Om vi försöker beräkna $f(1)$ så får vi resultatet $\frac{0}{0}$ som saknar mening. Detta ger upphov till följande problem: Hur uppför sig $f(x)$ då x närmar sig 1? Vi gör en "experimentell" undersökning genom att beräkna $f(x)$ för några x -värden i närheten av 1.

x	0.81	0.90	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.94868	1.99499	1.99950	2.00050	2.00499	2.04881

Det förefaller av tabellen att döma som om $f(x)$ närmar sig 2 då x närmar sig 1 både från vänster och höger. Att detta är rimligt inser vi om vi gör förlängningen

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = (\text{konjugatregeln}) = \sqrt{x} + 1.$$



Om $x \neq 1$ så gäller alltså att $f(x) = \sqrt{x} + 1$, och om x ligger nära 1 så ligger $\sqrt{x}$ nära 1, dvs. $f(x)$ ligger nära 2. Alltså bör

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2.$$

Vi måste dock precisera vad som menas med att $f(x)$ närmar sig 2 när x närmar sig 1. Granskar vi resultatet av den experimentella undersökningen så ser vi att det verkar som det bör vara möjligt att få $f(x)$ att ligga *godtyckligt* nära 2 genom att välja x *tillräckligt* nära 1. Detta kan också uttryckas på följande sätt. Genom att välja x *tillräckligt* nära 1 kan man få avvikelsen mellan $f(x)$ och 2, dvs. $|f(x) - 2|$, att bli mindre än vilket som helst på förhand givet positivt tal. Det är detta som är den exakta betydelsen av påståendet

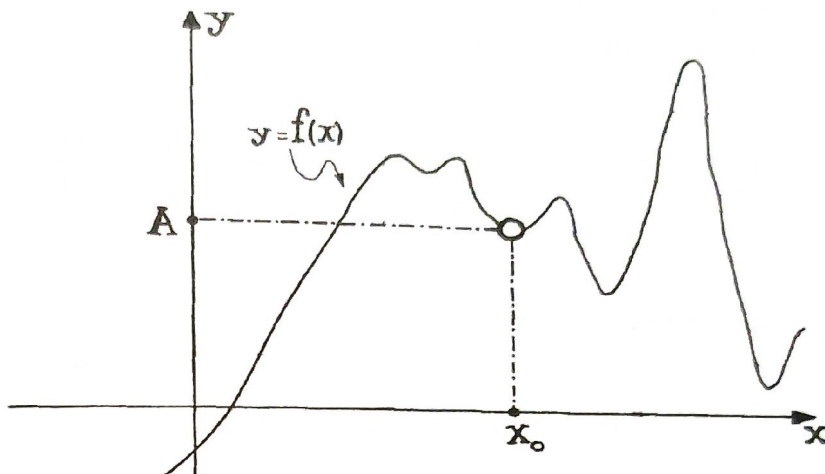
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2.$$

Låt nu f vara en funktion som är definierad i en omgivning till x dvs. i ett öppet intervall innehållande punkten x_0 , utom möjligen i x_0 . Vi gör då följande *provisoriska* definition.

Definition 2.2 Funktionen f sägs ha gränsvärdet A då x går mot x_0 om det går att få $f(x)$ att ligga godtyckligt nära A för alla x , tillräckligt nära x_0 , utom möjligen för $x = x_0$,

Detta skrivs $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ eller $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow x_0$.

För en mera exakt definition av $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ hänvisar vi läsaren till avsnitt 2.10 I definitionen av gränsvärde då $x \rightarrow x_0$ så förutsätts inte att f är definierad i själva punkten x_0 . (Jämför med exempel 2.18). Om f är definierad i x_0 så har funktionsvärdet $f(x_0)$ ingen betydelse för existensen och värdet av $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Uttalandet: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ är alltså ett uttalande om hur f "uppför sig" nära x_0 , men det säger ingenting om värdet av f i x_0 .

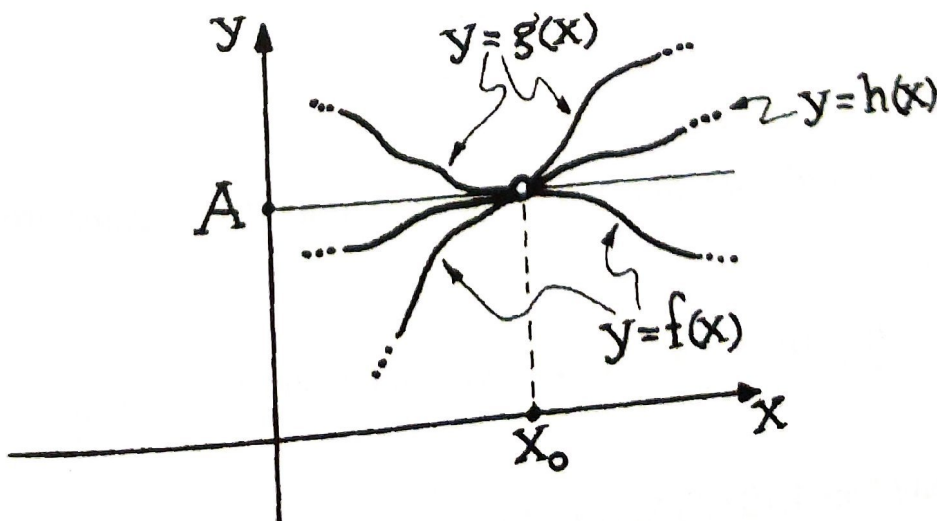


Även för gränsvärden då $x \rightarrow x_0$ finns en så kallad *instängningssats*. Den kan formuleras på följande sätt: Antag att $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ och att $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ för alla x tillräckligt nära x_0 , utom möjligen för $x = x_0$. Då är även $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$. Se nedanstående figur.

Genom att kombinera instängningssatsen med observationen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - A| = 0$$

får man en enkel metod att bestämma vissa gränsvärden.



Exempel 2.19 Visa att $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$.

Lösning: Vi ska visa att $\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 \right| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 1$. Eftersom

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1, \quad x \neq 1$$

(se exempel 2.18) är detta ekvivalent med att visa $|\sqrt{x}-1| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 1$. Genom att förlänga med konjugatuttrycket får vi

$$|\sqrt{x}-1| = \frac{|(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)|}{\sqrt{x}+1} = \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1}$$

Eftersom $\sqrt{x} \geq 0$ så ser vi att

$$0 \leq |\sqrt{x}-1| \leq |x-1|.$$

Uppenbarligen gäller att $|x-1| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 1$. Påståendet följer då av instängningsatsen.

Anmärkning: Som biprodukt av denna diskussion får vi att $\sqrt{x} \rightarrow 1 = \sqrt{1}$ då $x \rightarrow 1$. Man kan visa att $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a}$ då $x \rightarrow a$ för varje tal $a \geq 0$, dvs. att gränsvärdet av funktionen $\sqrt{x}$ då $x \rightarrow a$ är lika med funktionens värde i punkterna a . Detta uttrycks genom att säga att rotfunktionen är *kontinuerlig*. Vi studerar begreppet kontinuitet i avsnitt 2.4.

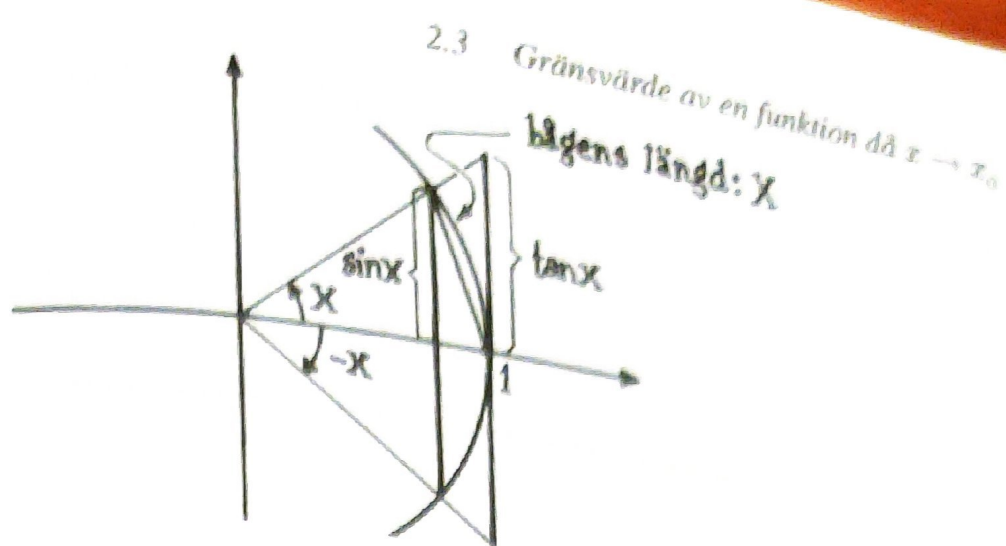
Vi ska nu bestämma det viktiga gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

(ett så kallat *standardgränsvärde*). För att bestämma detta gränsvärde behöver vi olikheterna

$$0 < \sin x < x < \tan x, \text{ som gäller om } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(Se figuren samt Sats 1.10 och Sats 1.11 sid. 70.)



Den vänstra av dessa olikheter ger att $\frac{\sin x}{x} < 1$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$ och, eftersom $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, följer av den högra olikheten att

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} \text{ för } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

För $0 < x < \pi/2$ gäller alltså att

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

(1)

Vi ska nu visa att olikheterna i (2.1) också gäller då $-\pi/2 < x < 0$. Om $-\pi/2 < x < 0$ så är $0 < -x < \pi/2$ och alltså är

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1.$$

Men $\cos(-x) = \cos x$ och

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

dvs. (2.1) gäller även då $-\pi/2 < x < 0$. Vi kommer också att behöva olikheten

$$|\sin x| \leq |x| \quad (2)$$

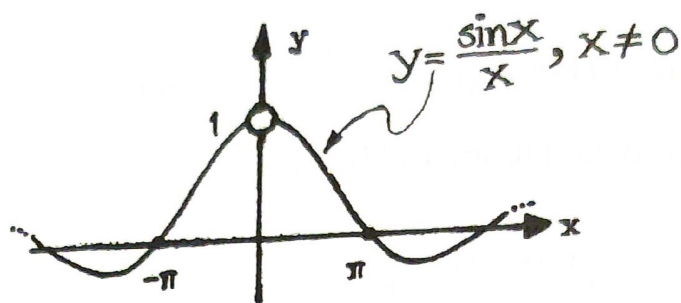
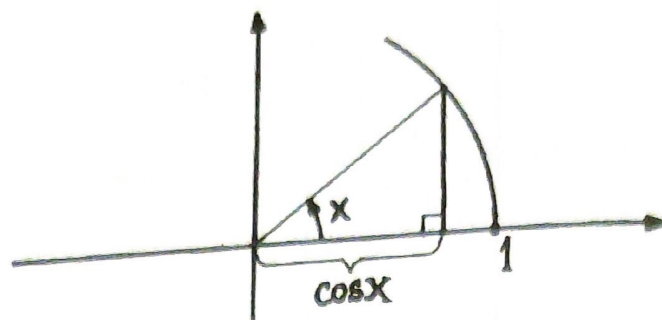
som gäller för alla x , med likhet endast för $x = 0$. Den visas lätt med hjälp av den högra olikheten i (2.1), men vi nöjer oss med att hänvisa till figuren ovan.

Exempel 2.20 Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Lösning: Vi vet att $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ för $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Det räcker alltså att visa att $\cos x \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$. Definitionen av $\cos x$ samt det faktum att $\cos 0 = 1$ gör att detta är intuitivt "självkänt". (Se figur nedan.) Vi ger dock ett bevis för att $\cos x \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$. Formeln $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ samt olikheten (2.2) ger

$$0 \leq 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Av instängningssatsen följer då att $\cos x \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$ och vi är klara.



Vi kommer att utnyttja gränsvärdet ovan när vi ska härleda derivatorna av de trigonometriska funktionerna. En mera omedelbar slutsats av det faktum att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

är att $\sin x \approx x$ för små värden på x (x i radianer). Följande tabell illustrerar detta.

x	$\sin x$	$x - \sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
0.10	0.0998333	0.0001667	0.998333
0.05	0.0499792	0.0000208	0.999584
0.01	0.00999983	0.0000017	0.999983

Man kan visa att relativa felet i approximationen $\sin x \approx x$ är mindre än 1% om $|x| \leq 0.25$ (cirka 14°).

Vi ska nu betrakta några exempel där $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ inte existerar, dvs. fall där funktionsvärdena inte närmar sig något bestämt tal, då x närmar sig en viss punkt x_0 .

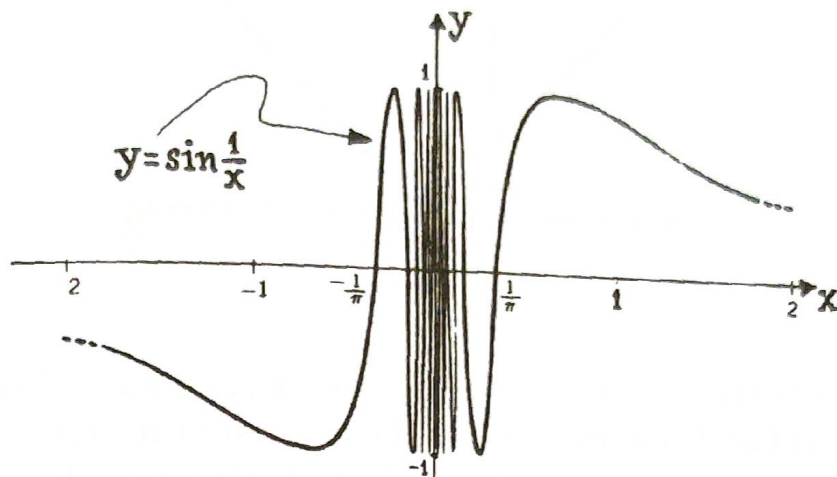
Exempel 2.21 Betrakta $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Vi skall undersöka om $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ existerar. Vi ser att $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ antar värdet 1 om $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal, dvs. om

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

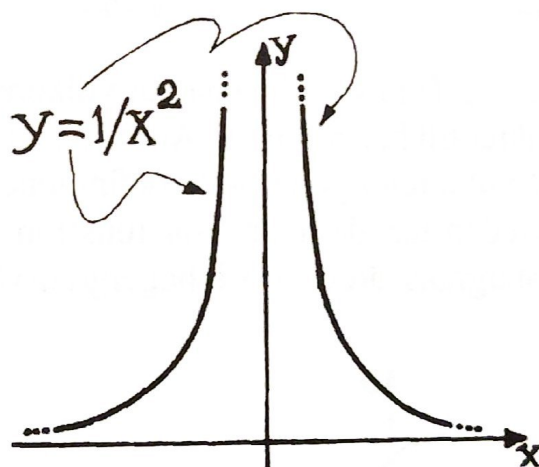
Analogt inses att funktionen antar värdet -1 om

$$x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Om vi väljer n stort i dessa formler kan vi tydligen få motsvarande tal x att ligga godtyckligt nära noll. Det finns alltså dels tal x godtyckligt nära noll för vilka $f(x) = 1$, dels tal x godtyckligt nära noll för vilka $f(x) = -1$. Av detta följer att funktionen f inte kan ha något gränsvärde då x går mot noll. Om gränsvärdet existerade skulle det ju finnas ett tal A , sådant att $f(x)$ skulle ligga nära A för *alla* x nära 0, $x \neq 0$.



Exempel 2.22 Uttrycket $1/x^2$ definierar en funktion för $x \neq 0$. Vad händer då x närmar sig 0?

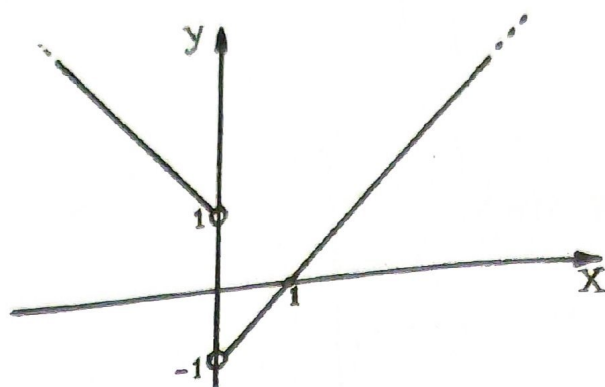


Lösning: Vi ser att $f(x) = 1/x^2 > 0$ för alla $x \neq 0$ och att $f(x)$ blir stort om vi väljer x nära noll. Exempelvis är $f(10^{-5}) = 10^{10}$ och ju närmare noll vi väljer x , desto större blir tydligen funktionsvärdet. Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ existerar alltså inte, men eftersom $f(x)$ växer över alla gränser då $x \rightarrow 0$ säger vi att funktionen har det *oegentliga* gränsvärdet oändligheten då $x \rightarrow 0$. Vi skriver $1/x^2 \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$ eller $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Om $-f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow x_0$ säger vi att $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow x_0$. Exempelvis gäller att $-1/x^2 \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0$.

Exempel 2.23 Betrakta funktionen f där $f(x) = |x|(1 - \frac{1}{x})$, $x \neq 0$. Om $x > 0$ så är $f(x) = x(1 - \frac{1}{x}) = x - 1$ och om $x < 0$ så är $f(x) = -x(1 - \frac{1}{x}) = -x + 1$.

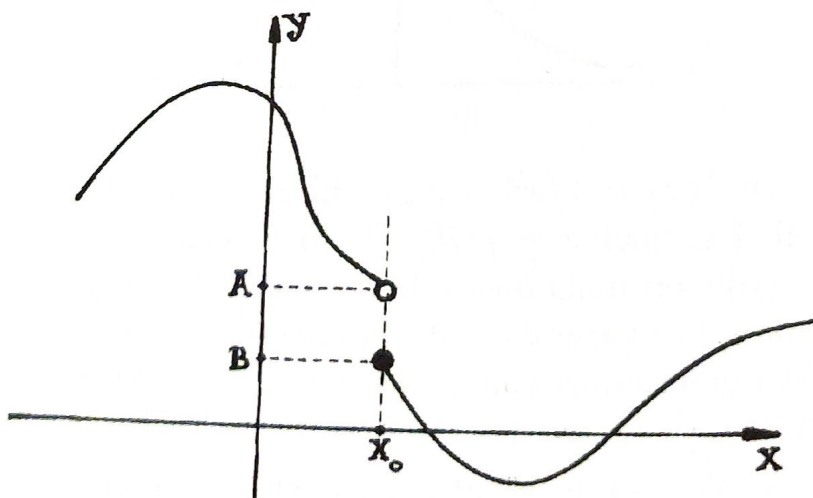
Vi kan nu rita kurvan $y = f(x)$.



Vi ser att om $x > 0$ och nära 0 så är $f(x)$ nära -1 och om $x < 0$ och nära 0 så är $f(x)$ nära 1. Det kan därför inte finnas något tal A sådant att $|f(x) - A|$ blir "lite" för alla x nära 0 (men $x \neq 0$). Funktionen f har därför inget gränsvärde då $x \rightarrow 0$. Däremot gäller att f har högergränsvärdet -1 då $x \rightarrow 0$ och vänstergränsvärdet 1 då $x \rightarrow 0$, vilket skrivs

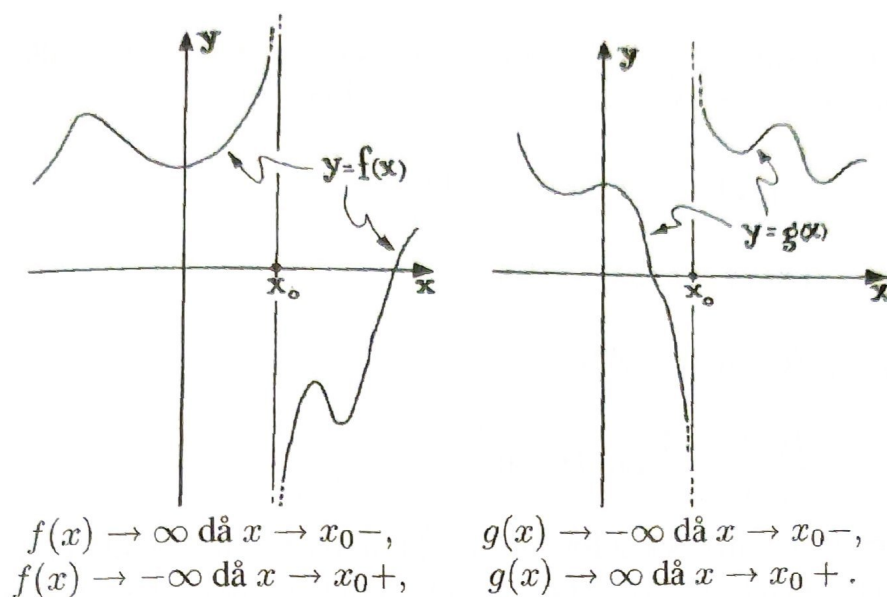
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1 \text{ respektive } \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1.$$

Allmänt gäller att $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$ innebär att villkoren i gränsvärdesdefinitionen är uppfyllda för punkter till höger om x_0 . Analogt gäller för vänstergränsvärdet $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = B$ att villkoren i gränsvärdesdefinitionen är uppfyllda för punkter till vänster om x_0 . Nedanstående figur visar funktionskurvan $y = f(x)$ till en funktion f som har vänstergränsvärdet A och högergränsvärdet B då $x \rightarrow x_0$.

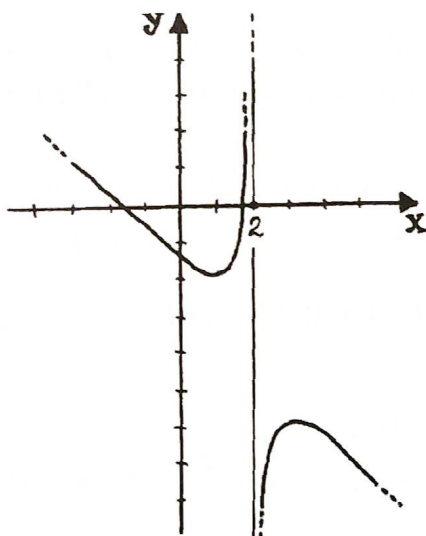


Man inser att en funktion f har gränsvärde då $x \rightarrow x_0$ om och endast om den har både vänster- och högergränsvärde då $x \rightarrow x_0$, och dessa är lika. (Jämför figuren.) Man kan också betrakta ensidiga oegentliga gränsvärden då $x \rightarrow x_0$. Se följande

figur:



Exempel 2.24 $f(x) = \frac{3-x^2}{x-2} \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{då } x \rightarrow 2-, \\ -\infty & \text{då } x \rightarrow 2+. \end{cases}$



Om $f(x) \rightarrow \infty$ eller $-\infty$ då $x \rightarrow x_0-$ eller då $x \rightarrow x_0+$ så sägs linjen $x = x_0$ vara en lodrät *asymptot* till kurvan $y = f(x)$.

Exempel 2.25 Linjen $x = 2$ är en lodrät asymptot till kurvan $y = \frac{3-x^2}{x-2}$. Det är dock viktigt att inse att ett nollställe till en nämnare inte nödvändigtvis måste motsvaras av en lodrät asymptot till kurvan. Betrakta t.ex. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. (Exempel 2.18). Linjen $x = 1$ är inte asymptot till kurvan $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, ty $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

2.3.1 Räknerregler

Räknerreglerna i Sats 2.2 på sid. 93 för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$ gäller också för gränsvärden då $x \rightarrow x_0$. Om $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ så gäller alltså att

I. $\lim_{x \rightarrow x_0} C f(x) = CA$ för varje tal C .

II. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.

III. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$.

IV. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ om $B \neq 0$.

Dessa räknerregler gäller också för ensidiga gränsvärden, dvs. gränsvärden av typen $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$. För oegentliga gränsvärden, dvs. gränsvärden av typen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty$ osv., gäller motsvarigheten till räknerreglerna på sid. 97.

Exempel 2.26 Visa med hjälp av räknerreglerna att $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 5x^2 + 3) = -15$.

Lösning: Sätt $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3 = x \cdot x \cdot x - 5 \cdot x \cdot x + 3$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ följer då med hjälp av räknerreglerna att $\lim_{x \rightarrow 3} P(x) = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 3 + 3 = -15 = P(3)$.

Om $P(x)$ är ett godtyckligt polynom ($P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$) följer på samma sätt som i exempel 2.26 att $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Om $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ är en rationell funktion (dvs. $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom) så ger detta och räknereg IV att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ om } Q(x_0) \neq 0.$$

Exempelvis är

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^4 - 11x^3 + 7x - 1}{x^3 - 7} = \frac{6 \cdot 2^4 - 11 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 1}{2^3 - 7} = 21.$$

Om $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow x_0$ och $g(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow x_0$ kan vi inte tillämpa räknerreglerna direkt för undersöka existens av gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Gränsvärdet kan dock trots detta existera, vilket exempel 2.18, exempel 2.19 och exempel 2.27 nedan visar. Gränsvärden av detta slag sägs vara av typen $\frac{0}{0}$.

2.3 Gränsvärde av en funktion då $x \rightarrow x_0$
Exempel 2.27 Undersök om $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$ existerar.

Lösning: Vi ser att $3x^2 - 5x + 2 \rightarrow 0$ och $2x^2 - x - 1 \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 1$. Detta medför att vi inte kan tillämpa räknelagarna direkt.

Men

$$\frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1} = \frac{(3x - 2)(x - 1)}{(2x + 1)(x - 1)} = \frac{3x - 2}{2x + 1}$$

om $x \neq 1$, och eftersom

$$\frac{3x - 2}{2x + 1} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ då } x \rightarrow 1$$

följer att det sökta gränsvärdet är $1/3$. (Observera att divisionen med $x - 1$ inte förorsakar några problem eftersom x aldrig behöver anta värdet 1, då $x \rightarrow 1$.)

Exempel 2.28 Visa att $\cos x \rightarrow \cos x_0$ då $x \rightarrow x_0$.

Lösning: Enligt en trigonometrisk formel (Sats 1.9 (formel 19) sid. 68) är

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

Detta, olikheten $|\sin t| \leq |t|$ samt att $|\sin t| \leq 1$ ger att

$$0 \leq |\cos x - \cos x_0| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|.$$

Denna uppskattning samt instängningssatsen ger nu påståendet.

Analogt visar man att $\sin x \rightarrow \sin x_0$ då $x \rightarrow x_0$. Detta och räkneregler III ger sedan att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \tan x_0 \text{ då } x \rightarrow x_0, x_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \text{ heltal.}$$

Exempel 2.29 Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Lösning: Eftersom både täljaren och nämnaren har gränsvärdet 0, då $x \rightarrow 0$, kan vi inte tillämpa räkneregler för gränsvärden direkt. Vi omformar först uttrycket.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Räkneregler för gränsvärden samt exempel 2.20 och exempel 2.28 ger nu att det sökta gränsvärdet är

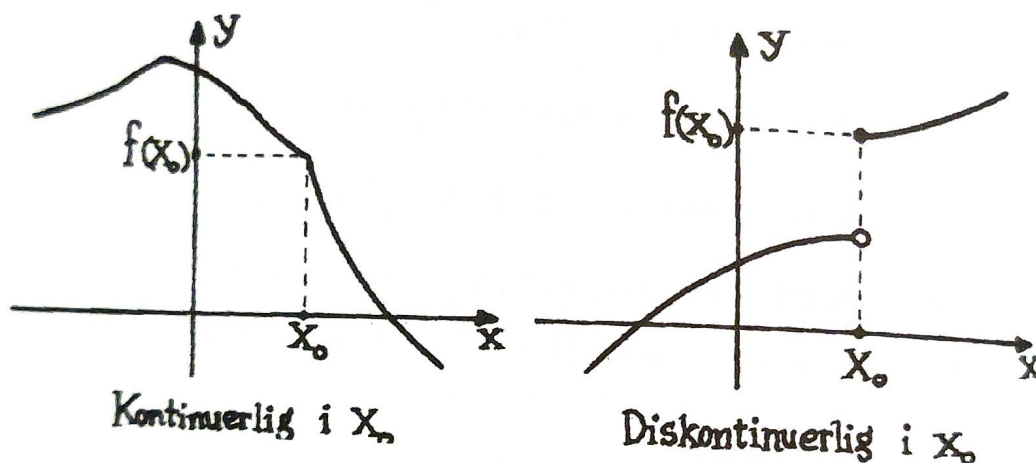
$$1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + \cos 0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Exempel 2.30

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}} = (\text{konjugatregeln}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2. \\ &(\text{ty } \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}).\end{aligned}$$

2.4 Kontinuitet

I detta avsnitt ska vi studera begreppet *kontinuitet* som är ett mycket viktigt begrepp i matematiken. I vanligt språkbruk används ordet kontinuitet i betydelsen "sammanhängande utveckling" eller "utan avbrott". Den matematiska betydelsen av ordet är likartad. Vi börjar med att diskutera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt x_0 . Det vi ska göra är att i matematiska termer uttrycka att funktionskurvan är sammanhängande.



Att funktionskurvan är sammanhängande för $x = x_0$ måste betyda att $f(x)$ ligger nära $f(x_0)$ för x -värden nära x_0 . Följande definition utgör den matematiska beskrivningen av denna egenskap hos en funktion f .

Definition 2.3 Funktionen f sägs vara kontinuerlig i punkten x_0 om

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observera att för att en funktion ska vara kontinuerlig i en punkt x_0 så ska tre villkor vara uppfyllda, nämligen:

- 1) Funktionen ska vara definierad för $x = x_0$.
- 2) Funktionen ska ha ett gränsvärde då $x \rightarrow x_0$.
- 3) Detta gränsvärde ska vara lika med funktionsvärdet i punkten x_0 .

Om något eller några av dessa villkor inte är uppfyllda så sägs funktionen ifråga vara *diskontinuerlig* i punkten x_0 . Grovt uttryckt kan man säga att en funktion f är kontinuerlig i en punkt x_0 om en "liten" förändring av x endast medför en "liten" ändring av funktionsvärdet. Om en liten ändring av x kan medföra att funktionsvärdet ändras avsevärt så är funktionen diskontinuerlig i punkten (jämför med högra figuren ovan).

Exempel 2.31 En funktion f definieras genom

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax - x^2 & \text{om } x < 2 \\ 1 - ax & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

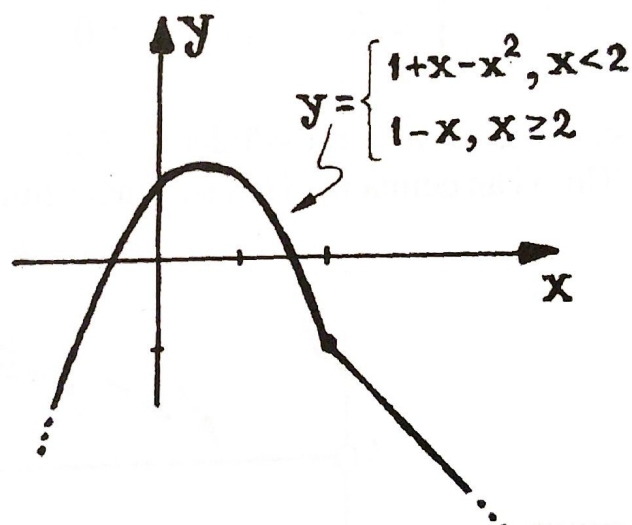
Bestäm a så att f blir kontinuerlig i 2.

Lösning: f blir kontinuerlig i 2 om $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (om gränsvärdet existerar). Villkoret för existens av gränsvärdet är att $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (1 + ax - x^2) = 1 + 2a - 4 = 2a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (1 - ax) = 1 - 2a$$

Vidare är $f(2) = 1 - 2a$. Vi måste alltså ha $2a - 3 = 1 - 2a \iff a = 1$. Om $a = 1$ så är vänstergränsvärdet = högergränsvärdet = funktionsvärdet = -1 .



Men för att belysa definitionen på kontinuitet ska vi betrakta några exempel på funktioner som är diskontinuerliga i en viss punkt, dvs. fall där villkoren i definitionen inte är uppfyllda.

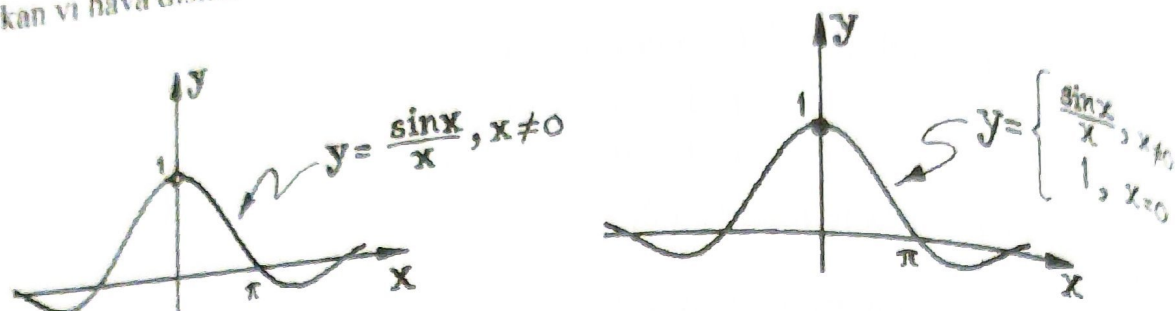
Exempel 2.32 Av definitionen på kontinuitet följer att om funktionen f inte är definierad i punkten x_0 så är den inte heller kontinuerlig i x_0 . Däremot kan (som vi tidigare har sett) gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ existera, trots att f inte är definierad i x_0 . Om så är fallet kan vi *häva* diskontinuiteten genom att helt enkelt sätta $f(x_0) = A$. Ett konkret exempel på ovanstående utgör

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0.$$

f är diskontinuerlig i 0 eftersom f inte är definierad där. Men eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

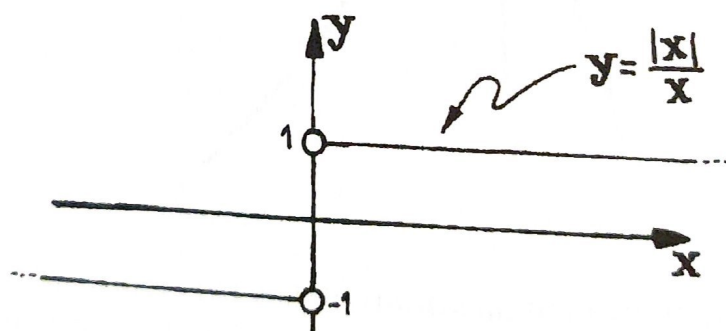
kan vi häva diskontinuiteten genom att sätta $f(0) = 1$. (Se figur.)



Exempel 2.33 Funktionen $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ uppvisar en annan och mera allvarlig typ av diskontinuitet. Denna funktion har vänstergränsvärdet -1 och högergränsvärdet 1 då $x \rightarrow 0$ ty

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{om } x > 0, \\ \frac{-x}{x} = -1 & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

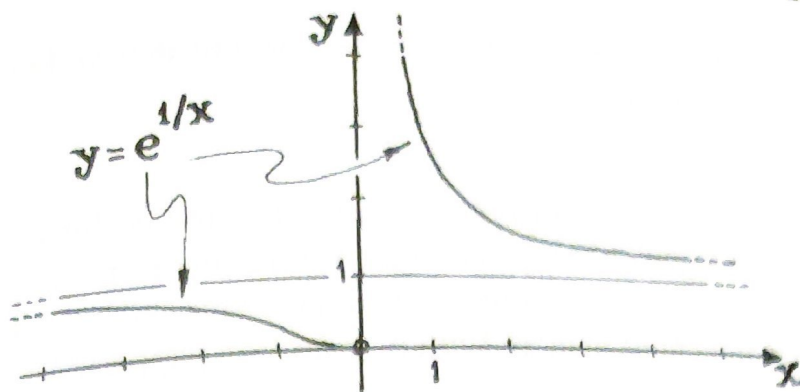
Då dessa inte är lika så existerar inte gränsvärdet av f då $x \rightarrow 0$, och diskontinuiteten kan inte hävas. (Hur vi än definierar $f(0)$ så hänger funktionskurvan inte ihop – se figur.)



En diskontinuitet av denna typ (dvs. då både vänster- och högergränsvärdet existerar men inte är lika) kallas för ett språng.

Exempel 2.34 Funktionen $f(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0$, är diskontinuerlig i 0 eftersom den inte är definierad där. Diskontinuiteten kan inte hävas ty

$$e^{1/x} \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{då } x \rightarrow 0+, \\ 0 & \text{då } x \rightarrow 0-. \end{cases}$$

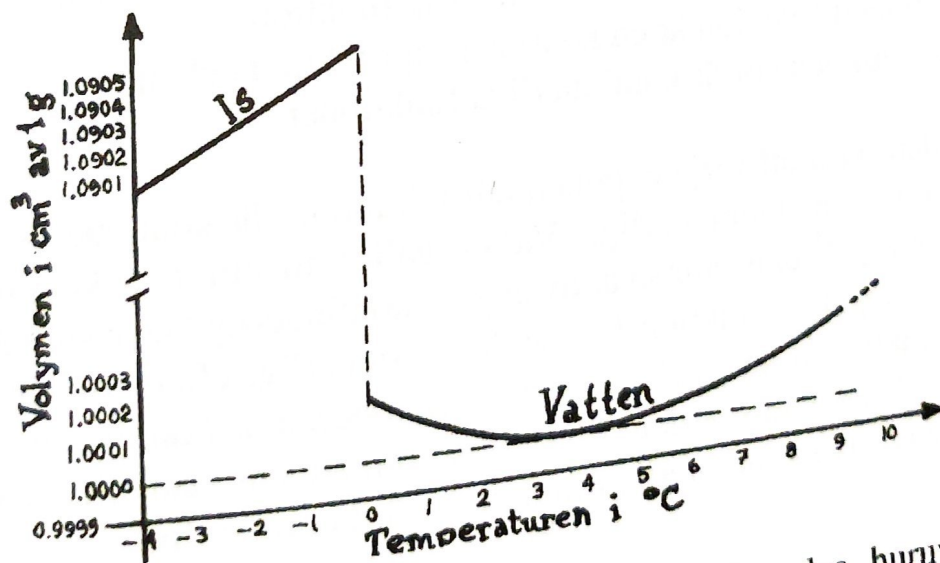


Exempel 2.35 Vi betraktar slutligen ett fall då varken vänster- eller högergränsvärdet existerar nämligen funktionen

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \text{ (exempel 2.21).}$$

Då $x \rightarrow 0$ så oscillerar funktionsvärdena oändligt många gånger mellan -1 och 1 (mera precist: godtyckligt nära noll finns punkter där f antar värdet 1 och punkter där f antar värdet -1).

Exempel 2.36 Volymen V av en viss mängd av ett ämne vid ett visst yttre tryck är en funktion av temperaturen. Denna funktion är diskontinuerlig för den temperatur som motsvarar ämnets fryspunkt. Betrakta t.ex. 1 g vatten. Vid temperaturen 4°C så är volymen 1.0000 cm^3 . När temperaturen avtar från 4°C till 0°C så ökar volymen till cirka 1.0001 cm^3 . Vid 0°C då vattnet fryser till is så ökar volymen plötsligt till ca 1.0905 cm^3 . Minskar temperaturen ytterligare så minskas volymen (kontinuerligt) och vid -4°C är den ca 1.0901 cm^3 .



Begreppet kontinuitet är en lokal egenskap hos en funktion, dvs. huruvida en funktion f är kontinuerlig i en viss punkt x_0 eller inte beror endast av hur f "uppför sig i närheten av x_0 ". En funktion kan därför vara kontinuerlig i vissa punkter och diskontinuerlig i andra. Många funktioner är dock kontinuerliga i varje punkt i sin definitionsmängd.

Definition 2.4 En funktion sägs vara *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje punkt, där den är *definierad*.

Av definitionen ovan följer att om en funktion är kontinuerlig i ett intervall så är dess funktionskurva sammanhängande. En intuitiv (men oprecis) definition av en kontinuerlig funktion är därför: Funktionen f är kontinuerlig i ett intervall om en går att rita kurvan $y = f(x)$ utan att lyfta pennan från pappret.

I föregående avsnitt visade vi att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

där P och Q är polynom och $Q(x_0) \neq 0$ samt att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0, \text{ om } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0, \text{ om } x_0 \neq n\pi.$$

Detta innebär att:

- varje polynomfunktion är en kontinuerlig funktion
- varje rationell funktion är en kontinuerlig funktion och att
- sin, cos, tan och cot är kontinuerliga funktioner.

Man kan vidare visa att varje exponentialfunktion a^x är kontinuerlig och att varje potensfunktion x^a är kontinuerlig. Vidare gäller att om f är kontinuerlig på ett intervall och om f^{-1} existerar så är även f^{-1} kontinuerlig (se avsnitt 2.8). Av detta följer att varje logaritmfunktion $\log_a x$ är kontinuerlig, eftersom den är invers till exponentialfunktionen a^x , och att arcusfunktionerna är kontinuerliga. Av räkneregler II – IV för gränsvärden följer dessutom att summan, differensen, produkten och kvoten av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Exempel 2.37 Eftersom funktionerna e^x och $\sin x$ är kontinuerliga så följer att funktionerna $e^x + \sin x$, $e^x - \sin x$, $e^x \cdot \sin x$ och $\frac{\sin x}{e^x}$ är kontinuerliga.

Exempel 2.38

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x - 1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2,$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 4} = \frac{2^2 - 1}{2 - 4} = -\frac{3}{2},$

c) $\lim_{x \rightarrow \ln 3} e^x = e^{\ln 3} = 3,$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan \pi/4 = 1,$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \arctan 1 = \pi/4,$

f) $\lim_{x \rightarrow 27} x^{1/3} = 27^{1/3} = 3,$

g) $\lim_{x \rightarrow 2.3} \ln x = \ln 2.3,$

I exempel 2.38 har vi utnyttjat att de inblandade funktionerna är kontinuerliga, varför gränsvärdet = funktionsvärdet.

2.5 Gränsvärden av sammansatta funktioner

Om vi vill beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x}$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$ har vi ingen nytta av våra tidigare räkneregler för gränsvärden. Med hjälp av Sats 2.3 nedan blir dock problemet lätt. Satsen ger nämligen att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \ln 1 = 0 \text{ och}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \cos 0 = 1,$$

dvs. man får "flytta in limessymbolen".

Sats 2.3 (Substitutionssatsen) *Antag att $g(x) \rightarrow y_0$ då $x \rightarrow x_0$ och att f är kontinuerlig i y_0 . Då gäller att $f(g(x)) \rightarrow f(y_0)$ då $x \rightarrow x_0$, dvs.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right).$$

Satsen gäller också (med naturliga ändringar) för höger- och vänstergränsvärden och då $x \rightarrow \infty$ eller då $x \rightarrow -\infty$.

För beviset av satsen hänvisar vi läsaren till avsnitt 2.10.

Exempel 2.39 Bestäm $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln(1 + 2x) - \ln(7x^2 + 3x + 1))$.

Lösning: Vi använder först logaritmlagarna för att omforma uttrycket

$$\begin{aligned} 2 \ln(1 + 2x) - \ln(7x^2 + 3x + 1) &= \ln \frac{(1 + 2x)^2}{7x^2 + 3x + 1} = \\ &= \ln \left(\frac{4x^2 + 4x + 1}{7x^2 + 3x + 1} \right). \end{aligned}$$

Eftersom

$$g(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{7x^2 + 3x + 1} \rightarrow \frac{4}{7}$$

då $x \rightarrow \infty$ och logaritmfunktionen är kontinuerlig följer att det sökta gränsvärdet är $\ln(4/7)$.

Exempel 2.40 Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{x}.$$

Lösning:

$$\frac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{1 + 4x} - 1)(\sqrt{1 + 4x} + 1)}{x(\sqrt{1 + 4x} + 1)} = \frac{4}{\sqrt{1 + 4x} + 1}.$$

Sats 2.3 ger nu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + 4x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)} = \sqrt{1} = 1$$

varför

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{1 + 4x} + 1} = \frac{4}{1 + 1} = 2.$$

Exempel 2.41 Bestäm $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$.

Lösning: Vi använder samma teknik som i exempel 2.40:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + x} - 2x &= \frac{(\sqrt{4x^2 + x} - 2x)(\sqrt{4x^2 + x} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \\ &= \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ då } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ty

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \sqrt{4} = 2.$$

Exempel 2.42

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Anmärkning: Substitutionssatsen förutsätter att den yttre funktionen f är kontinuerlig. I detta exempel är den yttre funktionen $\frac{\sin y}{y}$ inte kontinuerlig i $y = 0$, eftersom den inte är definierad där. Genom att betrakta funktionen

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y}, & \text{om } y \neq 0, \\ 1, & \text{om } y = 0, \end{cases}$$

får man dock en funktion f som uppfyller villkoren i satsen.

Varianter av sats 2.3 gäller även för vissa kombinationer med oegentliga gränsvärden inblandade. Exempelvis gäller (under lämpliga förutsättningar på f och g)

$$\left. \begin{array}{l} f(y) \rightarrow A \text{ då } y \rightarrow \infty \\ g(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow x_0 \end{array} \right\} \implies f(g(x)) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow x_0.$$

Exempel utgör $e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$, där $f(y) = e^{-y}$ och $g(x) = 1/x^2$.

Vidare gäller

$$\left. \begin{array}{l} f(y) \rightarrow \infty \text{ då } y \rightarrow y_0 \\ g(x) \rightarrow y_0 \text{ då } x \rightarrow x_0 \end{array} \right\} \implies f(g(x)) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow x_0.$$

Ett exempel på detta fall utgör

$$\frac{1}{\ln^2 x} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 1, \text{ där } f(y) = \frac{1}{y^2}, g(x) = \ln x.$$

Försök gärna att själv formulera ytterligare varianter av Sats 2.3.

Sats 2.4 Om funktionen g är kontinuerlig i punkten x_0 och funktionen f är kontinuerlig i punkten $y_0 = g(x_0)$ så är den sammansatta funktionen $f(g(x))$ kontinuerlig i punkten x_0 , dvs.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Speciellt gäller alltså att en funktion som är sammansatt av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Bevis: Vi ska visa att $f(g(x)) \rightarrow f(g(x_0))$ då $x \rightarrow x_0$. Enligt Sats 2.3 så gäller emellertid att $f(g(x)) \rightarrow f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$ då $x \rightarrow x_0$, och då g är kontinuerlig i x_0 så är $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ vilket ger satsen.

Exempel 2.43 Funktionen h där $h(x) = \sin(x^2 + 1)$ är kontinuerlig, ty den är sammansatt av de kontinuerliga funktionerna f och g där

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ och } f(y) = \sin y.$$

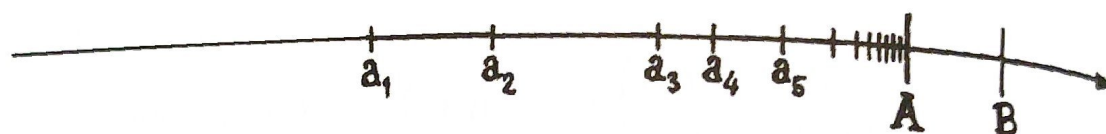
Kombinerar vi Sats 2.4 med resonemanget på sid. 115 får vi följande användbara sats.

Sats 2.5 Varje elementär funktion är kontinuerlig i sin naturliga definitionsmängd.

Vi erinrar om att en funktion sägs vara elementär om den kan bildas genom addition, subtraktion, multiplikation, division och sammansättning av rationella funktioner, trigonometriska funktioner, arcus-, potens-, exponential- och logaritmfunktioner.

2.6 Gränsvärden av monotona talföljder

Låt $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ vara en växande talföljd, dvs. $a_n \leq a_{n+1}, n = 1, 2, \dots$. Antag dessutom att följen är uppåt begränsad, dvs. att det finns ett tal B sådant att $a_n \leq B$ för alla n . Det är då intuitivt "självklart" att elementen i följen måste närma sig något fixt tal A då n växer, dvs. att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar.



Om följen av $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ är växande, men inte uppåt begränsad, kommer uppenbarligen a_n att växa över alla gränser då n växer, dvs. $a_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$.

Följande sats som även behandlar avtagande talföljder är därför naturlig.

Sats 2.6 Låt $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ vara en växande och uppåt begränsad talföljd. Då existerar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Analogt så gäller att om talföljen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ är avtagande och nedåt begränsad så existerar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Beviset av Sats 2.6 kräver kännedom om axiomet om övre gräns för de reella talen. Eftersom detta inte ingår i denna kurs måste vi utelämna beviset. Man kan också välja Sats 2.6 som ett grundläggande axiom för de reella talen.

Sats 2.6 gäller också för "vanliga funktioner". Om funktionen f är växande (avtagande) och uppåt (nedåt) begränsad i något intervall $x \geq c$ så existerar alltså $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Poängen med Sats 2.6 är att man med dess hjälp ofta kan avgöra existensen av ett gränsvärde, även i de fall då man inte kan eller vill beräkna detta.

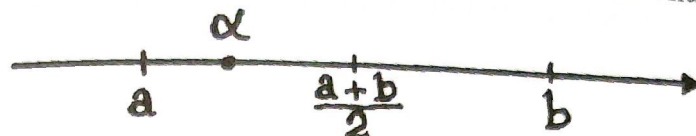
Exempel 2.44 Sätt $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Undersök om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar.

Lösning: Tydligt gäller att $a_n \leq a_{n+1}$ för alla n , dvs. talföljden är växande. Vidare inses att

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Alltså är $a_n < 2$ för alla n , dvs. talföljden är även uppåt begränsad. Av Sats 2.6 följer då att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar. Att bestämma gränsvärdet är dock inte lika enkelt. Man kan emellertid visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi^2/6 \approx 1.645$.

Exempel 2.45 Antag att a och b är närmevärden till ett tal α och att $a < \alpha < b$. Genom att bilda medelvärdet av a och b får man ett nytt närmevärde till α som är ett bättre närmevärde än åtminstone det sämre av närmevärdena a och b .



Vi ska utnyttja denna idé för att beräkna $\sqrt{2}$ med godtycklig noggrannhet. Antag att a är ett närmevärde till $\sqrt{2}$. Om $a > \sqrt{2}$ så är $2/a < \sqrt{2}$ och om $a < \sqrt{2}$ så är $2/a > \sqrt{2}$. Medelvärdet av a och $2/a$, dvs. $\frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a}\right)$ ger oss då ett nytt och förhoppningsvis bättre närmevärde till $\sqrt{2}$. Tar vi t.ex. $a = a_0 = 1$ som den första approximationen och $a = a_1 = 2$ som den andra approximationen får vi $a_2 = \frac{1}{2}(2 + 1) = 1.5$ som tredje approximationen och denna är tydligt bättre. Med hjälp av a_2 kan vi sedan bilda en ny approximation

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666\dots$$

Vi kan upprepa förfarandet ett godtyckligt antal gånger, och vi får på så sätt följande rekursivt definierade talföljd

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right). \end{cases}$$

De 5 första approximationerna är

n	a_n
1	2
2	1.5
3	1.416666666...
4	1.414215700...
5	1.414213562...

Decimalutvecklingen av $\sqrt{2}$ är 1.4142135624.... Ovanstående diskussion utgör dock inget bevis för att $a_n \rightarrow \sqrt{2}$, då $n \rightarrow \infty$. För att visa detta observerar vi först att talföljden ovan är *nedåt begränsad*, ty för alla n är $a_n > 0$.

Tabellen ovan ger oss vidare anledning att förmoda att a_n är avtagande. Om vi lyckas visa detta vet vi att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar, ty en talföljd som är avtagande och nedåt begränsad är konvergent. Vi ska visa att $a_{n+1} \leq a_n$ för alla positiva heltal n , dvs. att $a_n - a_{n+1} \geq 0$. Nu gäller

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_n} (a_n^2 - 2) = \\ &= \frac{1}{2a_n} (a_n + \sqrt{2}) (a_n - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Eftersom $a_n > 0$ för alla n gäller det tydligen att visa att $a_n \geq \sqrt{2}$ för alla positiva heltal n . Detta gör vi med induktion. Påståendet är sant för $n = 1$ ty $a_1 = 2 > \sqrt{2}$. Antag att $a_p \geq \sqrt{2}$. Vi ska då visa att även $a_{p+1} \geq \sqrt{2}$, dvs. att $a_{p+1} - \sqrt{2} \geq 0$. Men

$$a_{p+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(a_p + \frac{2}{a_p} \right) - \sqrt{2} = \frac{a_p^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_p}{2a_p} = \frac{(a_p - \sqrt{2})^2}{2a_p} \geq 0.$$

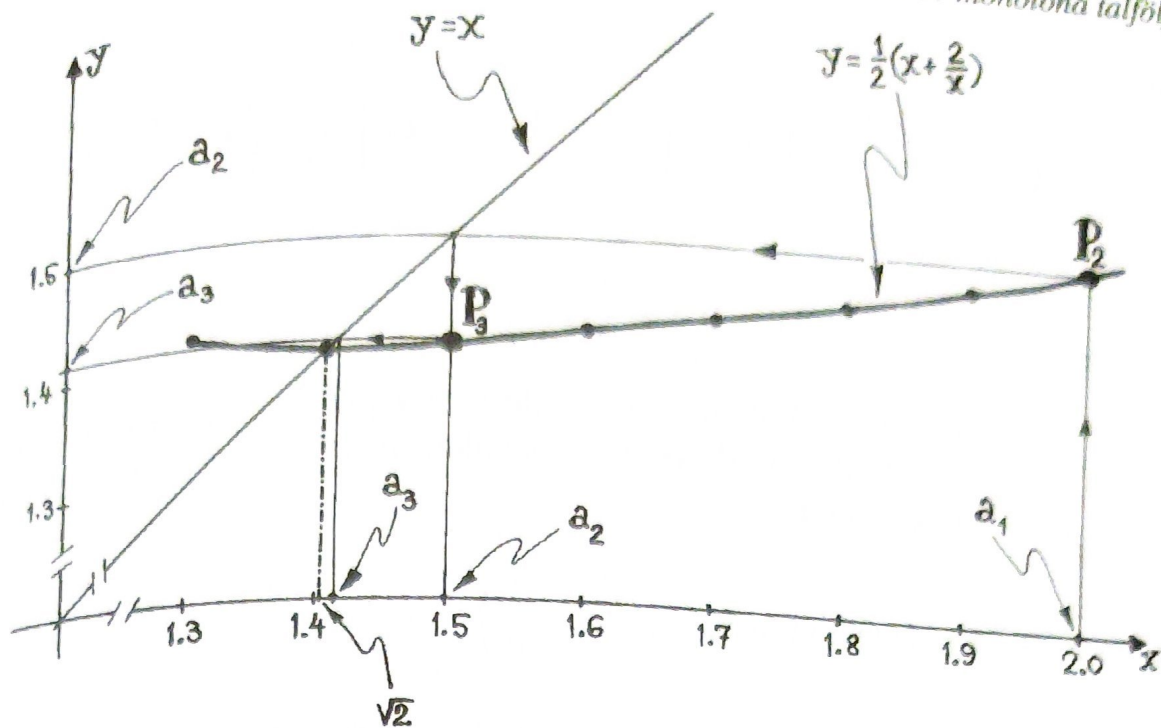
Vi vet nu att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar. Om vi kallar gränsvärdet för A så gäller

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{A}{2} + \frac{1}{A}.$$

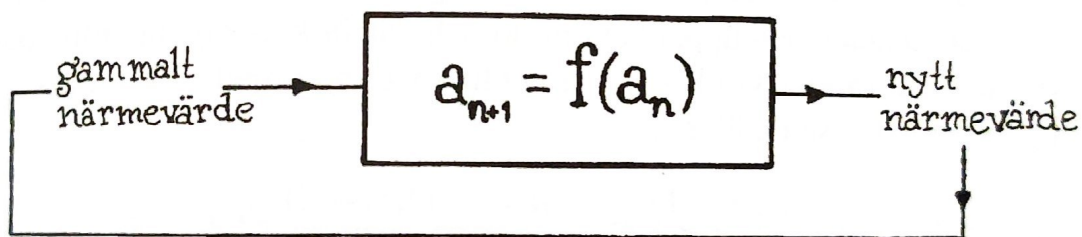
(En smula eftertanke visar nämligen att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.) Ekvationen

$$A = \frac{A}{2} + \frac{1}{A}$$

ger slutligen att $A = \sqrt{2}$ eller $A = -\sqrt{2}$. Men då $a_n > 0$ för alla n följer att $A = \sqrt{2}$. I nedanstående figur har vi visat hur man kan illustrera konvergensen grafiskt. Vi har ritat kurvan $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ och linjen $y = x$. Av rekursionsformeln ser vi att $a_{n+1} = f(a_n)$. Eftersom $a_1 = 2$ fås då a_2 som y -koordinaten för den punkt P_2 på kurvan vars x -koordinat är 2. För att sedan få a_3 ska vi bestämma den punkt P_3 på kurvan vars x -koordinat är a_2 . Hur denna punkt konstrueras framgår av figuren. För att bestämma $a_4, a_5, \dots$ upprepas konstruktionen. Figuren illustrerar även att talföljden $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ är avtagande och nedåt begränsad och att gränsvärdet svarar mot skärningspunkten mellan kurvan och linjen $y = x$.



Anmärkning: Exempel 2.45 illustrerar en iterativ process. (Varje beräkning av typen $a_{n+1} = f(a_n)$ kallas för *iteration*.) Iterativa metoder används ofta för att bestämma närmevärden i olika sammanhang, speciellt om man har tillgång till en dator. Tekniken är att man startar med en första approximation och sedan med hjälp av denna beräknar man en andra approximation, av den andra beräknas sedan en tredje approximation osv. Processen genererar en talföljd som förhoppningsvis konvergerar mot lösningen av problemet. I avsnitt 4.9 som behandlar numerisk lösning av ekvationer kommer vi att återkomma till denna idé.



Exempel 2.46 Antag att ett kapital k_0 förräntas efter p % årlig ränta. Om räntan läggs till kapitalet i slutet av varje år så växer kapitalet på t år till $k_0(1 + \alpha)^t$, där $\alpha = p/100$. Läggs räntan till kapitalet halvårsvis så växer kapitalet på t år till $k_0(1 + \frac{\alpha}{2})^{2t}$, vilket fås genom att i stället räkna med $\frac{p}{2}$ % ränta under vart och ett av $2t$ halvår. Delar man in året i m lika långa perioder och lägger räntan till kapitalet i slutet av varje sådan period så inses på samma sätt att kapitalet efter t år har vuxit till $k_0(1 + \frac{\alpha}{m})^{mt}$. Vi sätter

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{x}, \text{ dvs. } x = \frac{m}{\alpha}.$$

Då blir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k_0 \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{mt} = \lim_{x \rightarrow \infty} k_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x\alpha t} = k_0 \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{\alpha t}$$

under förutsättning att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ existerar.}$$

Vi undersöker existensen av detta gränsvärde i exempel 2.48, men betraktar då först fallet då $x \rightarrow \infty$ genom de positiva heltalen, dvs. vi undersöker huruvida $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existerar.

Exempel 2.47 Undersök om $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existerar.

Lösning: Sätt $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Eftersom $1 + \frac{1}{n} > 1$ för alla n och $a^n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$ om $a > 1$ ligger det nära till hands att tro att $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$. Vi testar denna hypotes genom att beräkna några tal i början av talföljden.

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25,$$

$$a_3 \approx 2.37, \quad a_5 \approx 2.448, \quad a_{10} \approx 2.593,$$

$$a_{64} \approx 2.698, \quad a_{256} \approx 2.712, \quad a_{1024} \approx 2.717.$$

Vårt intuitiva resonemang ser ut att vara felaktigt, och i stället är det förmodligen så att följen är växande och uppåt begränsad och därför konvergent enligt Sats 2.6. För att visa detta utvecklar vi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ med hjälp av binomialsatsen (Sats 1.4, sid. 38). Enligt binomialsatsen gäller

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}x^k + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1}{n!}x^n \end{aligned}$$

Sätter vi $x = 1/n$ får vi

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Alla termer från och med den tredje i denna utveckling växer då n växer. Då dessutom alla termer är positiva och antalet termer växer då n växer följer att talföljden $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n = 1, 2, \dots$ är strängt växande. Av utvecklingen för a_n ser vi också att

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= (\text{enligt formeln för summan av en geometrisk talföljd}) = \\ &= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 \text{ för alla } n > 2. \end{aligned}$$

Talföljden är alltså strängt växande och uppåt begränsad av 3. Enligt Sats 2.6 existerar därför $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Gränsvärdet brukar betecknas med e . Talet e är ett viktigt tal som dyker upp i många olika sammanhang. Bl.a. gäller att e är bas för den naturliga logaritmen. Vår undersökning visar att $2 < e \leq 3$. I själva verket gäller att talet e är ett irrationellt tal vars decimalutveckling börjar med 2.7182818284....

Exempel 2.48 Visa att $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$ då a) $x \rightarrow \infty$, b) $x \rightarrow -\infty$.

Lösning: a) Låt n vara heltalsdelen av x dvs. det största heltal som är mindre än eller lika med x . Då är $n \leq x \leq n+1$ och att detta följer att för $x > 1$ så är

$$1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

och

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (3)$$

eftersom funktionen a^t är växande då $a > 1$. Men

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

och

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

dvs. båda de yttre leden i (2.3) har gränsvärdet e då $n \rightarrow \infty$. Eftersom $n \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ följer alltså att

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

b) Om $x \neq -1$ så gäller

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-x} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1},$$

där $y = -(x + 1)$. Eftersom $y \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow -\infty$ följer så påståendet av a).

Exempel 2.49 Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+3}$.

Lösning: Sätt $\frac{2}{n+1} = \frac{1}{t}$, dvs. $t = \frac{n+1}{2}$. Då är $n = 2t - 1$ och

$$\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+3} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t+2} = \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2.$$

Eftersom $t \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$ följer att det sökta gränsvärdet är lika med e^2 .

Exempel 2.50 Av exempel 2.46 och exempel 2.48 följer att ett kapital k_0 vid momentan kapitalisering (räntan p %) efter t år vuxit till

$$k_0 \cdot e^{pt/100}.$$

För att ta ett specifikt exempel, låt oss betrakta 100 kr som förräntas med 9 % ränta under 10 år. Vid helårsvis kapitalisering har kapitalet vuxit till $100 \cdot 1.09^{10} \approx 236.74$ kr och vid momentan kapitalisering har kapitalet vuxit till $100 e^{0.9} \approx 245.96$ kr. Tydligt är detta inget snabbt sätt att bli rik på!

2.7 Standardgränsvärden

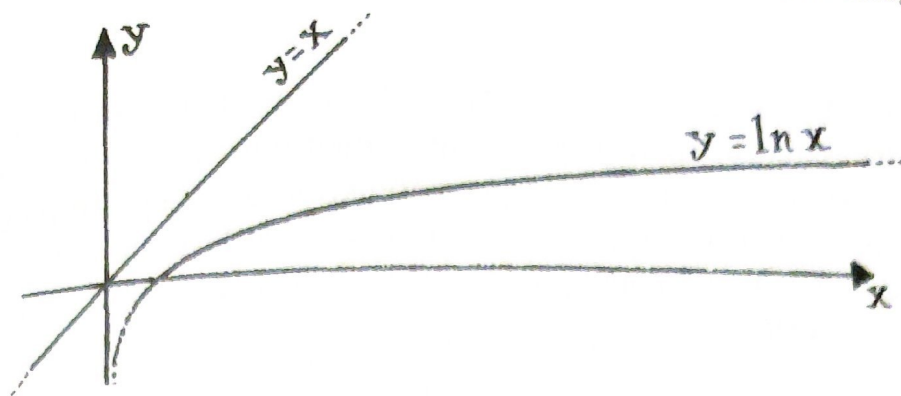
Beräkningar av gränsvärden återförs i allmänhet med hjälp av räkneregler på ett eller flera s.k. standardgränsvärden. Så återförs t.ex. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ på standardgränsvärdet $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ genom substitutionen $y = 3x$. I detta avsnitt har vi samlat ett antal standardgränsvärden som tidigare inte behandlats.

För att bestämma gränsvärden av typen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bryter man ut den term som växer snabbast för stora x i täljaren respektive nämnaren. (Se t.ex. exempel 2.12). För att kunna göra detta krävs dock att man känner storleksordningen hos olika funktioner för stora x och vi ska därför undersöka storleksordningen hos logaritmfunktioner, potensfunktioner och exponentialfunktioner för stora x . Vi utgår därvid från följande hjälpsats. Beviset ges i avsnitt 2.10 (Lemma 2.17, sid. 138).

Lemma 2.7 $\ln x < x$ för alla $x > 0$.



Med hjälp av olikheten $\ln x < x$ kan vi nu visa följande viktiga gränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0. \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, a > 1, \alpha \text{ godtycklig.} \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x = 0, \alpha > 0. \quad (2.6)$$

Bevis: Vi visar först (2.4). Vi kan skriva

$$\ln x = \frac{2}{\alpha} \ln x^{\alpha/2}.$$

Detta och lemmat ger uppskattningen

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha} \frac{x^{\alpha/2}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}, \quad x \geq 1.$$

Av instängningssatsen får vi då att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

För att visa (2.5) gör vi först omskrivningen $a = e^{\ln a}$ och substitutionen $x = \ln y$. Vi kan anta att $\alpha > 0$ eftersom gränsvärdet (2.5) uppenbarligen gäller för $\alpha \leq 0$.

Detta ger

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{(\ln y)^\alpha}{(e^{\ln a})^{\ln y}} = \frac{(\ln y)^\alpha}{(e^{\ln y})^{\ln a}} = \frac{(\ln y)^\alpha}{y^{\ln a}} = \left(\frac{\ln y}{y^\beta} \right)^\alpha,$$

där $\beta = \frac{\ln a}{\alpha} > 0$, eftersom $a > 1$ och $\alpha > 0$. Sedan tidigare vet vi att $x \rightarrow \infty$ precis då $y \rightarrow \infty$. Alltså gäller

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln y}{y^\beta} \right)^\alpha = (\text{substitutionssatsen}) = \\ &= \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y^\beta} \right)^\alpha = (\text{enligt (2.4)}) = 0^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Innan vi visar (2.6) påminner vi om att $\ln x \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0+$. (Se övning 2.48f.) Gränsvärdet i (2.6) är alltså av typen " $0 \cdot \infty$ ". För att visa (2.6) gör vi substitutionen $x = 1/y$ och observerar att $x \rightarrow 0+$ är detsamma som att $y \rightarrow \infty$. Vi får

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln y}{y^\alpha} = 0$$

enligt (2.4).

Anmärkning: Eftersom $\ln x \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ innebär gränsvärdet i (2.4) att $\ln x \rightarrow \infty$ långsammare är varje potens av x med *positiv* exponent. Gränsvärdet i (2.5) säger i sin tur att varje sådan potensfunktion går långsammare mot oändligheten än varje exponentialfunktion med basen större 1. Exempelvis gäller alltså att 1.01^x går snabbare mot oändligheten än x^{100} , dvs. för alla tillräckligt stora x gäller att $x^{100} < 1.01^x$.

Exempel 2.51 Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$.

Lösning: Vi har

$$\frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} = \frac{(\ln x)^3}{x^{1/2}} = \left(\frac{\ln x}{x^{1/6}} \right)^3.$$

Substitutionssatsen och (2.4) ger då

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/6}} \right)^3 = 0^3 = 0.$$

Exempel 2.52 Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{0.2}(\ln x)^5$.

Lösning: $x^{0.2}(\ln x)^5 = (x^{0.04} \cdot \ln x)^5$. Substitutionssatsen och (2.6) ger då

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{0.2}(\ln x)^5 = \left(\lim_{x \rightarrow 0+} x^{0.04} \cdot \ln x \right)^5 = 0^5 = 0.$$

Anmärkning: På samma sätt som i exempel 2.51 respektive 2.52 kan man visa att

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0), \quad (2.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \quad (\alpha > 0), \quad (2.8)$$

där $\beta > 0$ i båda fallen är ett godtyckligt tal.

Exempel 2.53 Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + (\ln x)^5}{e^x + 4x}$.

Lösning: Den snabbast växande termen i täljaren är x^3 (en potens växer snabbare än en logaritm). I nämnaren växer e^x snabbast. Vi bryter ut x^3 och e^x och får

$$\frac{x^3 + (\ln x)^5}{e^x + 4x} = \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{(\ln x)^5}{x^3}\right)}{\left(1 + 4 \cdot \frac{x}{e^x}\right)}.$$

Uttrycken inom parentes går mot 1 då $x \rightarrow \infty$ enligt gränsvärdena (2.7) och (2.5). Vidare följer av gränsvärdet (2.5) att $x^3/e^x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Produktregeln ger nu att det sökta gränsvärdet är 0.

Exempel 2.54 Undersök om $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ existerar.

Lösning: Eftersom $x > 0$ kan vi skriva $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$, och då exponentialfunktionen är kontinuerlig, så får vi att

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x)} = (\text{enligt (2.6) sid. 123}) = e^0 = 1.$$

Exempel 2.55 Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. (Standardgränsvärde).

Lösning: Vi använder samma teknik som i exempel 2.54.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

Exempel 2.56 Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. (Standardgränsvärde.)

Lösning: $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ där $t = 1/x$. Då $x \rightarrow 0+$ respektive $0-$ gäller att $t \rightarrow \infty$ resp. $-\infty$. Eftersom $\ln$ -funktionen är kontinuerlig följer då av exempel 2.48 att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \ln\left(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) = \ln e = 1.$$

Exempel 2.57 Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. (Standardgränsvärde.)

Lösning: Sätt $t = e^x - 1$. Då är $e^x = 1 + t$ och $x = \ln(1+t)$. Vidare inses att $t \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ varför

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

enligt exempel 2.57.

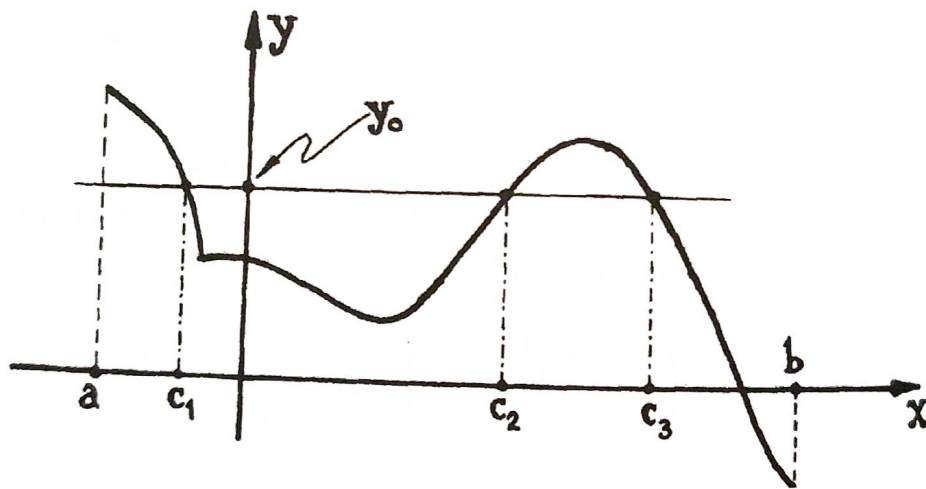
Anmärkning: Resultaten i exempel 2.56 och exempel 2.57 innebär att för små x gäller att $\ln(1+x) \approx x$ och att $e^x - 1 \approx x$, dvs. $e^x \approx 1 + x$.

2.8 Egenskaper hos kontinuerliga funktioner

En av anledningarna till att man studerar begreppet kontinuitet är att kontinuerliga funktioner uppvisar en del trevliga egenskaper som funktioner i allmänhet inte har. Vi skall i detta avsnitt diskutera tre grundläggande satser för kontinuerliga funktioner definierade på ett *slutet begränsat* intervall. Bevisen för satserna måste vi (tyvärr) utelämna, eftersom deras bevis kräver en djupare kunskap om de reella talens egenskaper än vad vi har möjlighet att förmedla i denna bok. Lyckligtvis är dock satsernas innehåll sådant att man utan vidare tror på deras riktighet.

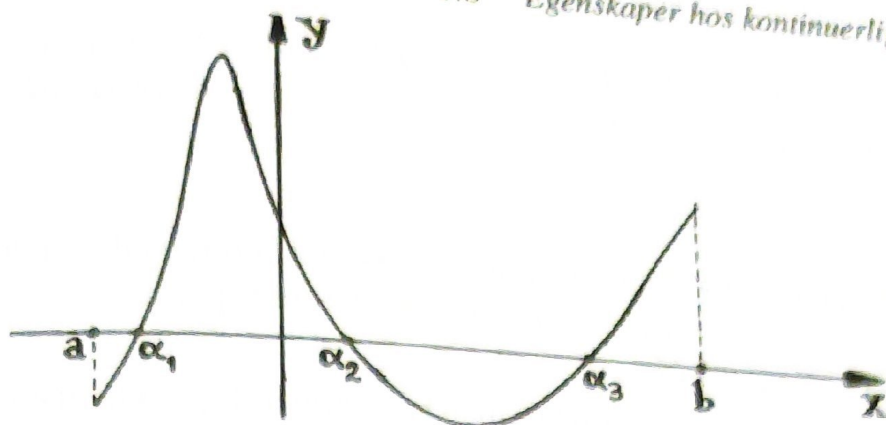
Vi började vår diskussion om kontinuerliga funktioner med en beskrivning som innebar att funktionskurvan till en funktion är sammanhängande i varje intervall där funktionen är kontinuerlig. Vår första sats är en kvantitativ beskrivning av detta förhållande.

Sats 2.8 (Satsen om mellanliggande värden.) *Om funktionen f är kontinuerlig i ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ och y_0 ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ så finns minst ett tal $c \in [a, b]$ sådant att $f(c) = y_0$.*



Som figuren visar kan det finnas fler än ett sådant tal c . Sats 2.8 säger dock ingenting om hur många c det finns sådana att $f(c) = y$, eller var i intervallet $[a, b]$ ett visst sådant c ligger. Sats 2.8 är en s.k. *existenssats*. Ett specialfall av satsen om mellanliggande värden är speciellt viktigt och vi formulerar det som en följsats.

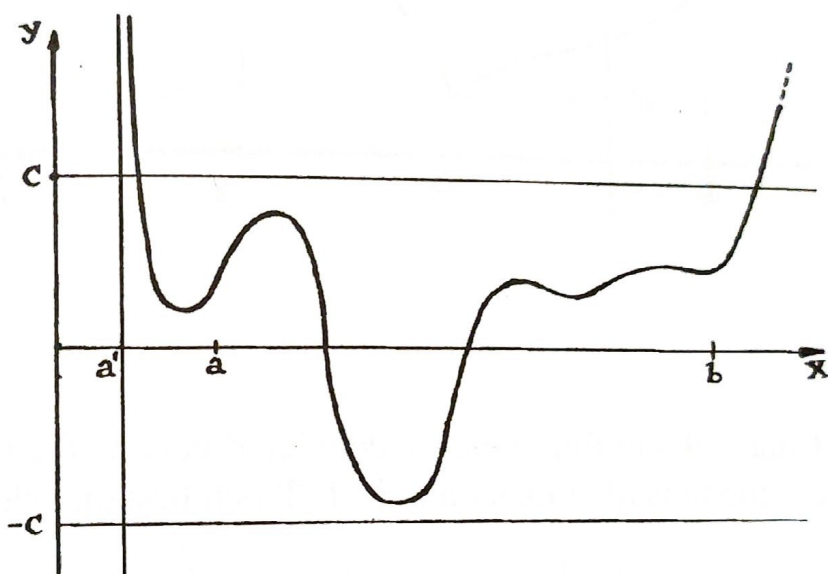
Sats 2.9 (Följsats till Sats 2.8) *Om f är kontinuerlig i ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ och $f(a)$ och $f(b)$ har motsatta tecken så har ekvationen $f(x) = 0$ minst en lösning i intervallet $[a, b]$.*



Exempel 2.58 Visa att ekvationen $e^x - 2x^2 = 0$ har minst en rot i intervallet $[1, 2]$.

Lösning: Inför den kontinuerliga funktionen $f(x) = e^x - 2x^2$. Eftersom $f(1) = e - 2 > 0$ och $f(2) = e^2 - 8 \approx 7.389 - 8 < 0$ följer påståendet av följsatsen.

Sats 2.10 Om funktionen f är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ så är f begränsad i detta intervall, dvs. det finns en konstant C så att $|f(x)| \leq C$ för alla x i $[a, b]$.



Funktionen i figuren är begränsad på intervallet $[a, b]$ men inte på intervallet $(a', b]$.

Exempel 2.59 Funktionen $f(x) = 1/x$ är kontinuerlig i det halvöppna intervallet $(0, 1]$, men inte begränsad i detta intervall, ty $1/x \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0+$. Däremot är f begränsad i intervallet $[a, 1]$, där $0 < a < 1$.

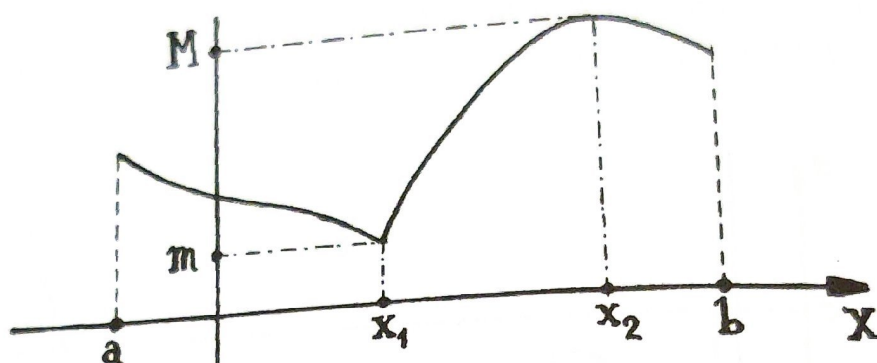
Exempel 2.59 visar att det i Sats 2.10 är väsentligt att intervallet är slutet. Det är också lätt att ge exempel som visar att Sats 2.10 inte behöver gälla om intervallet är obegränsat eller om funktionen inte är kontinuerlig i intervallet i fråga.

Observera dock att en funktion kan vara begränsad utan att villkoren i satsen är uppfyllda. Ett enkelt exempel på detta utgör funktionen $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Sats 2.11 Om funktionen f är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$, så har f ett största värde M och ett minsta värde m i detta intervall.

Att f har ett största värde M och ett minsta värde m i intervallet $[a, b]$ innebär dels att $m \leq f(x) \leq M$ för alla $x \in [a, b]$, dels att det finns punkter x_1, x_2 i $[a, b]$ så att $f(x_1) = m$ och $f(x_2) = M$.

Sats 2.11 säger dock ingenting om hur man bestämmer de punkter där största respektive minsta värdet antas. För deriverbara funktioner finns metoder för bestämning av de punkter i vilka funktionen antar sitt minsta respektive största värde (se kapitel 4). Vissa enkla fall kan dock klaras utan användning av derivatan som exempel 2.60 visar.

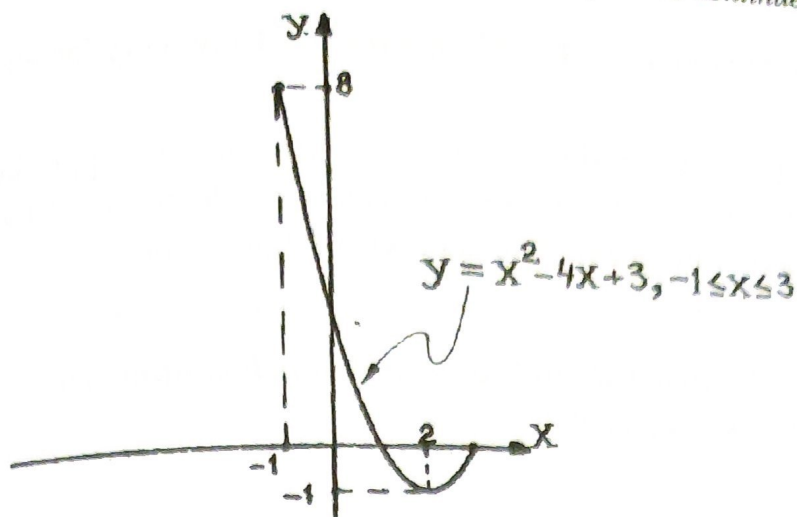


Exempel 2.60 Undersök om funktionen f definierad genom $f(x) = x^2 - 4x + 3$ har ett minsta och största värde i intervallet $[-1, 3]$ och bestäm i så fall dessa.

Lösning: Eftersom f är kontinuerlig och $[-1, 3]$ är ett slutet begränsat intervall, har f ett minsta och största värde i intervallet $[-1, 3]$. För att bestämma dessa gör vi en kvadratkomplettering

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Eftersom $(x - 2)^2 \geq 0$ så är $f(x) \geq -1$ med likhet för $x = 2$ som tillhör intervallet $[-1, 3]$. Funktionens minsta värde i intervallet $[-1, 3]$ är därför -1 . Vidare inses att $f(x) \leq f(-1) = 8$ i intervallet $[-1, 3]$. Funktionens största värde i intervallet $[-1, 3]$ är alltså 8 .



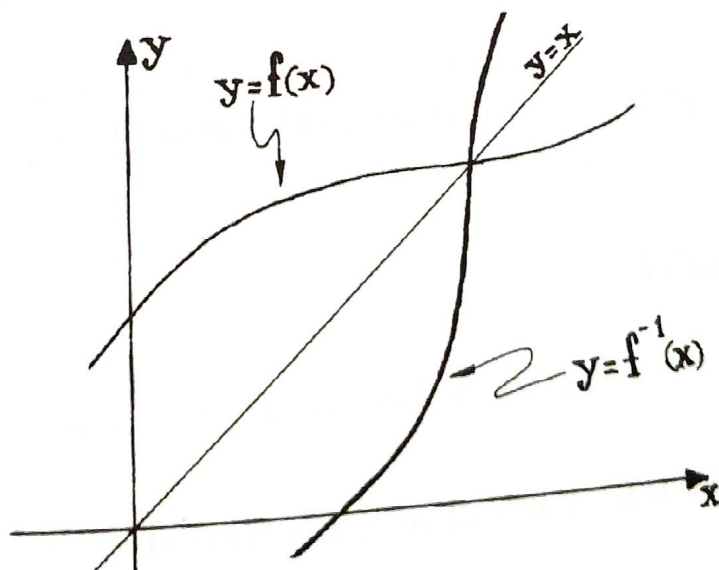
Exempel 2.61 Funktionen $f(x) = 1/x$ har ett största värde på intervallet $[2, \infty)$, nämligen $f(2) = 1/2$. Däremot har f inget minsta värde i detta intervall.

Exempel 2.61 visar att om något av villkoren i Sats 2.11 inte är uppfyllt så behöver satsens slutsats inte gälla. Dessutom visar exempel 2.61 att omvändningen till Sats 2.11 inte gäller, ty $f(x) = 1/x$ har ett största värde i intervallet $[2, \infty)$ som varken är slutet eller begränsat.

I detta sammanhang ska vi också diskutera egenskaper hos inversa funktioner. Antag att en funktion f är definierad på ett intervall och

- a) strängt monoton,
- b) kontinuerlig.

Av a) följer att f har en invers f^{-1} . Vårt problem är nu: Följer av b) att f^{-1} är kontinuerlig? Vi erinrar oss att om en funktion f har en invers f^{-1} så är kurvan $y = f^{-1}(x)$ spegelbilden i linjen $y = x$ av kurvan $y = f(x)$.



Om f är kontinuerlig i ett intervall så är kurvan $y = f(x)$ sammanhängande. Intuitivt är det då klart att kurvan $y = f^{-1}(x)$ är sammanhängande, eftersom den är

spegelbilden av kurvan $y = f(x)$ i linjen $y = x$. Detta betyder att funktionen f^{-1} är kontinuerlig.

Ovanstående resonemang är dock inget bevis, eftersom begreppet kontinuitet inte är definierat med hjälp av begrepp som sammanhängande kurvor. Med hjälp av satsen om mellanliggande värden kan man dock visa följande sats.

Sats 2.12 Om funktionen f är strängt monoton och kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ så är inversen f^{-1} kontinuerlig.

Av den här satsen följer kontinuiteten hos logaritmfunktionerna av kontinuiteten hos exponentialfunktionerna och kontinuiteten hos arcus-funktionerna av kontinuiteten hos de trigonometriska funktionerna.

2.9 Sammanfattning av vissa definitioner och satser, samt standardgränsvärden

2.9.1 Räkner regler för gränsvärden

Om $f(x) \rightarrow A$ och $g(x) \rightarrow B$, då $x \rightarrow \infty$, så gäller att

$$f(x) + g(x) \rightarrow A + B \text{ då } x \rightarrow \infty,$$

$$f(x)g(x) \rightarrow AB \text{ då } x \rightarrow \infty,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B} \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ förutsatt att } B \neq 0.$$

Om $A = B$ och $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ i något intervall $x \geq a$ så gäller att $h(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$ (instängningssatsen). Motsvarande gäller för gränsvärden då $x \rightarrow x_0$ och $x \rightarrow -\infty$.

2.9.2 Kontinuitet

Funktionen f är kontinuerlig i x_0 om $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.9.3 Gränsvärden av sammansatta funktioner

Om f är kontinuerlig i y_0 och $g(x) \rightarrow y_0$ då $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) så gäller att $f(g(x)) \rightarrow f(y_0)$ då $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

2.9.4 Gränsvärden av monotona talföljder (funktioner)

Om talföljden $a_1, a_2, \dots$ är växande (avtagande) och uppåt (nedåt) begränsad så existerar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Motsvarande gäller för "vanliga" funktioner.

2.9.5 Standardgränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \text{ om } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \text{ om } a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \text{ om } \beta > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \text{ om } \alpha > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \begin{cases} = 0 \text{ om } |a| < 1 \\ = \infty \text{ om } a > 1 \\ \text{existerar ej om } a < -1 \end{cases},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$

2.10 Några bevis

I avsnitt 2.2-2.3 införde vi gränsvärdesbegreppet med hjälp av intuitiva, men oprecisa, begrepp som "godtyckligt nära", "tillräckligt stort", "tillräckligt nära". Vi ska nu ge exakta definitioner som fastlägger innebörden i dessa begrepp. Vi ger först en definition av uttrycket

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ eller } f(x) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Definition 2.5 Vi säger att funktionen f har gränsvärdet A då $x \rightarrow \infty$ om till varje positivt tal ε finns ett tal ω sådant att

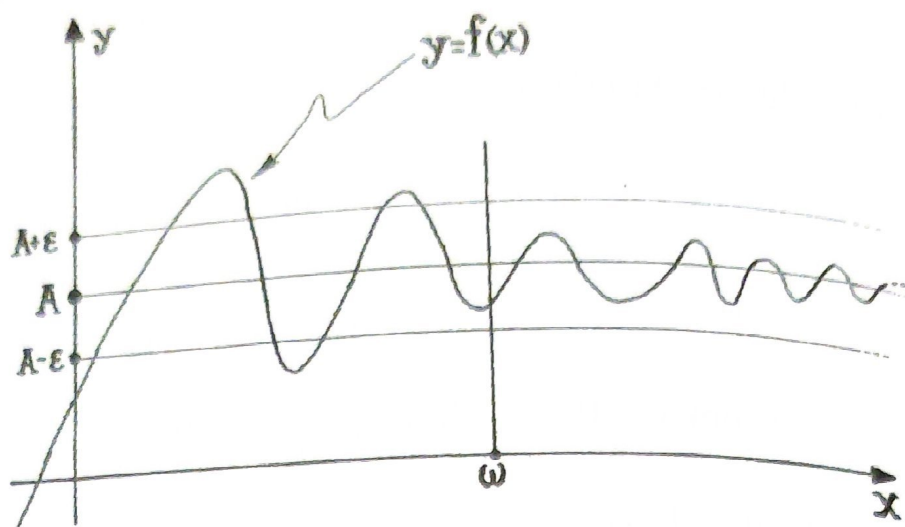
$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ för alla } x > \omega. \quad (9)$$

Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ eller } f(x) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Hur litet man än väljer det positiva talet ε ska man alltså kunna hitta ett tal ω sådant att avvikelsen mellan $f(x)$ och A är mindre än ε för alla $x > \omega$.

Den geometriska tolkningen av definitionen visas i nedanstående figur. Hur ser man att man kan hitta ett tal ω sådant att kurvan $y = f(x)$ för alla $x > \omega$ ligger i strimlan $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$?



Man bör observera

- Talet ω beror i allmänhet av ε och ju mindre man väljer ε , desto större måste ω vara för att (2.9) ska gälla.
- Man är inte intresserad av att bestämma det bästa möjliga, dvs. det minsta tal ω för vilket (2.9) gäller för ett givet ε . Det är fullständigt tillräckligt om man lyckas hitta något sådant tal ω .

Exempel 2.62 Visa med hjälp av definitionen att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x \cos x}{3x^2 - 1} = \frac{2}{3}$.

Lösning: Vi ska visa att till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal ω sådant att

$$\left| \frac{2x^2 + x \cos x}{3x^2 - 1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \text{ för alla } x > \omega.$$

Låt därför $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi har

$$\left| \frac{2x^2 + x \cos x}{3x^2 - 1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{|3x \cos x + 2|}{3|3x^2 - 1|}.$$

Triangelolikheten ger

$$|3x \cos x + 2| \leq 3|x| \cdot |\cos x| + 2 \leq 3|x| + 2.$$

Om $x > 1$ är alltså

$$|3x \cos x + 2| \leq 3x + 2 \leq 3x + 2x = 5x.$$

Vi uppskattar nu nämnaren nedåt. För exempelvis $x > 1$ är

$$|3x^2 - 1| = 3x^2 - 1 \geq 3x^2 - x^2 = 2x^2.$$

Alltså gäller för $x > 1$ att

$$\left| \frac{2x^2 + x \cos x}{3x^2 - 1} - \frac{2}{3} \right| \leq \frac{5x}{6x^2} = \frac{5}{6x}.$$

Eftersom $5/6x < \varepsilon$ om $x > 5/6\varepsilon$ har vi alltså visat att om ω är det största av talen 1 och $5/2\varepsilon$ så gäller

$$\left| \frac{2x^2 + x \cos x}{3x^2 - 1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \text{ för alla } x > \omega, \text{ dvs.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x \cos x}{3x^2 - 1} = \frac{2}{3}.$$

Definitionen av $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ är analog med definitionen av $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ och överlämnas åt läsaren.

Vi ska nu ge en definition av vad som menas med att $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow x_0$. Den intuitiva innebörden av detta är att $f(x)$ ska ligga "nära" A då x ligger nära x_0 dvs. att $|f(x) - A|$ är litet. Preciseringsen av detta gör vi i definitionen nedan.

Definition 2.6 Vi säger att funktionen f har gränsvärdet A då $x \rightarrow x_0$ om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{10}$$

för alla $x \neq x_0$ vars avstånd till x_0 är mindre än δ , dvs. för alla x sådana att

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Detta skrivs

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ eller } f(x) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow x_0.$$

Anmärkning: Anledningen att man bortser från vad som händer i x_0 är att man ofta har en funktion som inte är definierad i x_0 , men att man trots detta vill undersöka $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. (Jämför t.ex med exempel 2.18 och 2.20).

Exempel 2.63 Visa med hjälp av definitionen att $\frac{x}{x^2 + 2} \rightarrow \frac{1}{3}$ då $x \rightarrow 2$

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{1}{3} \right| &= \frac{|3x - x^2 - 2|}{3(x^2 + 2)} = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{3(x^2 + 2)} = \\ &= (\text{faktoruppdelning}) = \frac{|(x-1)(x-2)|}{3(x^2 + 2)} = |x-2| \cdot \frac{|x-1|}{3(x^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Om $|x-2| < 1$, så är $|x-1| < 2$ ty $|x-1| = |x-2+1| \leq |x-2| + 1 < 3$.
Eftersom dessutom $3(x^2 + 2) \geq 6$ för alla x så gäller alltså

$$\left| \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{1}{3} \right| < \frac{|x-2|}{3}$$

för alla x sådana att $|x - 2| < 1$. Låt nu ε vara ett godtyckligt positivt tal. Av olikheten ovan följer då att

$$\left| \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

för alla x , sådana att $|x - 2| < 3\varepsilon$ och $|x - 2| < 1$. Vi kan alltså välja δ som den minsta av talen 1 och 3ε .

Vi påminner om att en funktion f sägs vara kontinuerlig i en punkt x_0 om $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existerar och är lika med $f(x_0)$. Detta kan enligt definitionen av gränsvärde också uttryckas på följande sätt.

Definition 2.7 En funktion f är kontinuerlig i en punkt x_0 om man för varje positivt tal ε kan hitta ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

för alla x sådana att $|x - x_0| < \delta$.

Definition 2.8 Funktionen f har det oegentliga gränsvärdet ∞ , då $x \rightarrow \infty$, om det till varje λ finns ett tal ω sådant att $f(x) > \lambda$ för alla $x > \omega$. Detta skrivs

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ eller } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

På motsvarande sätt definieras uttrycket $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$ samt oegentliga gränsvärden då $x \rightarrow -\infty$.

Exempel 2.64 Visa att $\frac{x^3}{x^2 + 1} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.

Lösning: För $x \geq 1$ gäller att

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} \geq \frac{x^3}{x^2 + x^2} = \frac{x}{2}.$$

Om λ är ett godtyckligt (positivt) tal är alltså

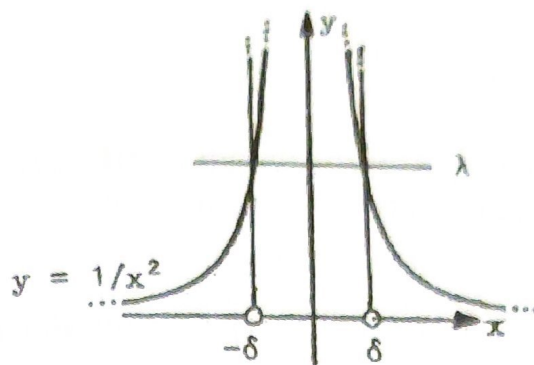
$$\frac{x^3}{x^2 + 1} > \lambda \text{ om } \frac{x}{2} > \lambda, \text{ dvs. om } x > 2\lambda.$$

Sätter vi $\omega = 2\lambda$ så är $\frac{x^3}{x^2 + 1} > \lambda$ för alla $x > \omega$ vilket visar påståendet.

Definition 2.9 Vi säger att funktionen f har det oegentliga gränsvärdet ∞ ($-\infty$), då $x \rightarrow x_0$, om till varje tal λ finns ett tal δ sådant att $f(x) > \lambda$ ($f(x) < \lambda$) för alla x sådana att $0 < |x - x_0| < \delta$.

Exempel 2.65 Visa att $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$.

Lösning: Låt λ vara ett godtyckligt positivt tal. Eftersom $1/x^2 > \lambda$ om $0 < x^2 < 1/\lambda$ dvs. om $0 < |x| < 1/\sqrt{\lambda}$ följer att vi kan välja $\delta = 1/\sqrt{\lambda}$.



Sats 2.13 (Instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$.) Antag att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$ och att $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ för alla x större än något tal ω_0 . Då gäller att $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A$.

Bevis: Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Vi ska visa att det finns ett tal ω sådant att $|h(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$. Eftersom både $f(x)$ och $g(x)$ går mot A då $x \rightarrow \infty$ finns tal ω_1 och ω_2 så att

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \text{ för alla } x > \omega_1,$$

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \text{ för alla } x > \omega_2.$$

Låt ω vara det största av talen $\omega_0, \omega_1, \omega_2$. Eftersom $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ följer då att $A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$ för alla $x > \omega$, dvs. $|h(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$ och vi är klara.

För beviset av räkneregler för gränsvärden behöver vi följande hjälpsats som även har ett visst egenvärde. Den visar nämligen att om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existerar så måste funktionen f vara begränsad för stora positiva värden på x .

Lemma 2.14 Antag att $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$. Då finns ett tal ω sådant att $|f(x)| < |A| + 1$ för alla $x > \omega$.

Bevis: Till varje tal $\varepsilon > 0$ kan vi hitta ett tal ω sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$. Väljer vi $\varepsilon = 1$ så ger detta och triangelolikheten att

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

för alla $x > \omega$ och vi är klara.

Sats 2.15 (Räkneregler för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$.) Antag att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ och att $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$. Då gäller

Kapitel 2. Gränsvärden och kontinuitet

- I. $\lim_{x \rightarrow \infty} C f(x) = C A$ för varje konstant C ,
 II. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = A + B$,
 III. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = AB$,
 IV. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ om $B \neq 0$.

Bevis: Eftersom I egentligen är ett specialfall av III, visar vi endast II., III. och IV.
 Vi låter i alla bevis ε vara ett godtyckligt positivt tal.

II. Vi ska visa att det finns ett tal ω sådant att
 $|f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$.

Enligt triangelolikheten gäller att

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (A + B)| &= |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B|. \end{aligned}$$

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$ så finns det tal ω_1 och ω_2 sådana att

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \varepsilon/2 \text{ för alla } x > \omega_1, \\ |g(x) - B| &< \varepsilon/2 \text{ för alla } x > \omega_2. \end{aligned}$$

Om ω är det största av talen ω_1 och ω_2 så är alltså

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ för alla } x > \omega, \text{ vilket visar II.}$$

III. Vi skall visa att det finns ett tal ω sådant att $|f(x)g(x) - AB| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$. Omskrivningen $f(x)g(x) - AB = (f(x) - A) \cdot g(x) + A(g(x) - B)$ och triangelolikheten ger

$$|f(x)g(x) - AB| \leq |f(x) - A| |g(x)| + |A| |g(x) - B|.$$

Enligt Lemma 2.14 finns ett tal ω_0 sådant att $|g(x)| < |B| + 1$ för alla $x > \omega_0$. Vidare finns det tal ω_1 och ω_2 sådana att

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)} \text{ för alla } x > \omega_1, \\ |g(x) - B| &< \frac{\varepsilon}{2|A|} \text{ för alla } x > \omega_2. \end{aligned}$$

(Vi antar att $A \neq 0$.)

Om ω är det största av talen ω_0 , ω_1 och ω_2 så följer då att

$$|f(x)g(x) - AB| < \frac{(|B| + 1)\varepsilon}{2(|B| + 1)} + \frac{|A| \cdot \varepsilon}{2|A|} = \varepsilon$$

för alla $x > \omega$, vilket visar III.

IV. Det räcker att visa $1/g(x) \rightarrow 1/B$ då $x \rightarrow \infty$, ty detta och räkneregeln III ger då påståendet. Vi har

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|B| |g(x)|}.$$

Eftersom $g(x) \rightarrow B \neq 0$ då $x \rightarrow \infty$ finns ett tal ω_0 sådant att

$$|g(x) - B| < |B|/2 \text{ för alla } x > \omega_0.$$

Om $x > \omega_0$ ger då triangelolikheten

$$|B| = |(B - g(x)) + g(x)| \leq |B - g(x)| + |g(x)| \leq |B|/2 + |g(x)|,$$

dvs.

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2} \text{ om } x > \omega_0.$$

Vi kan vidare hitta ett tal ω_1 sådant att $|B - g(x)| < \varepsilon |B|^2/2$ för alla $x > \omega_1$. Om ω är det största av talen ω_0 och ω_1 är alltså

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| \leq \frac{\varepsilon |B|^2}{2} \cdot \frac{2}{|B|^2} = \varepsilon$$

för alla $x > \omega$ och vi är klara.

Räknereglerna I-IV gäller också för gränsvärdena då $x \rightarrow x_0$. Eftersom bevisen är analoga med bevisen ovan utelämnar vi dem.

Sats 2.16 (Substitutionssatsen) Om $g(x) \rightarrow y_0$ då $x \rightarrow \infty$ och om f är kontinuerlig i y_0 så gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f(y_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right).$$

Denna sats gäller också med naturliga ändringar för gränsvärden då $x \rightarrow x_0$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Det finns då enligt definitionen på kontinuitet ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon \tag{11}$$

för alla y sådana att $|y - y_0| < \delta$. Till detta δ finns då ett tal ω sådant att

$$|g(x) - y_0| < \delta \tag{12}$$

för alla $x > \omega$. Sätt nu $y = g(x)$ i (2.11). Av (2.12) följer då att

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

för alla x sådana att $x > \omega$. Detta bevisar satsen. Beviset av motsvarande sats för gränsvärden då $x \rightarrow x_0$ är analogt.

När vi visade de viktiga gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \quad \alpha > 0,$$

utgick vi från olikheten $\ln x < x$, $x > 0$. Vi ger här ett bevis för denna olikhet.

Lemma 2.17 $\ln x < x$ för alla $x > 0$.

Bevis: Vi observerar först att olikheten är sann om $0 < x \leq 1$, ty då är $\ln x \leq 0$. Vi betraktar därför endast $x > 1$. Välj $x_0 > 1$ godtyckligt och ett positivt heltal n_0 så att $2^{n_0-1} \leq x_0 < 2^{n_0}$. Eftersom logaritmfunktionen är strängt växande så är

$$\ln 2^{n_0-1} \leq \ln x_0 < \ln 2^{n_0}.$$

Vidare är $\ln 2^n = n \ln 2 < n$ (ty $0 < \ln 2 < \ln e = 1$) och med induktion kan man visa att $n \leq 2^{n-1}$ för alla positiva heltal n . Alltså är

$$\ln x_0 < \ln 2^{n_0} < n_0 \leq 2^{n_0-1} \leq x_0,$$

dvs. $x_0 > \ln x_0$. Eftersom x_0 är ett godtyckligt tal är då hjälpsatsen bevisad.

2.11 Övningar

2.11.1 Gränsvärde av funktion

2.1 Då $x \rightarrow \infty$ så gäller att $\frac{3}{2x+7} \rightarrow 0$.

a) Bestäm något (inte nödvändigtvis det minsta) tal ω (omega) för vilket det gäller att

$$0 < \frac{3}{2x+7} < \frac{1}{1000} \text{ för alla } x > \omega.$$

b) Bestäm det minsta positiva tal ω för vilket olikheten i a) gäller.

c) Låt ε (epsilon) vara ett givet positivt tal. Visa att hur litet man än väljer ε så kan man hitta ett tal ω sådant att $0 < \frac{3}{2x+7} < \varepsilon$ för alla $x > \omega$.

Anmärkning. Resultatet i c) visar att man kan få avvikelser mellan $\frac{3}{2x+7}$ och 0 att bli godtyckligt liten för alla tillräckligt stora tal x , vilket alltså bevisar påståendet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2x+7} = 0$.

- 2.2 Enligt exempel 2.5 gäller att $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) = 3$. Bestäm något tal ω sådant att avvikelsen mellan $\sqrt{x^2 + 6x} - x$ och 3, dvs. $|\sqrt{x^2 + 6x} - x - 3|$ är
- mindre än $\frac{1}{100}$ för alla $x > \omega$,
 - mindre än ε för alla $x > \omega$, där ε är ett godtyckligt litet givet positivt tal. (Ledning: Utnyttja att

$$|\sqrt{x^2 + 6x} - x - 3| = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 6x} + 3 + x} \leq \frac{9}{x} \text{ för } x > 0.)$$

(Se exempel 2.5).

- 2.3 a) Gissa utan att göra några beräkningar vad $\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^2 + 1} - x^2)$ blir.
 b) Beräkna värdet av $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - x^2$ för $x = 10, 100$ och 1000 . Stöder resultaten din gissning?
 c) Använd samma teknik som i exempel 2.5 för att bestämma $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

- 2.4 Funktionen f är sådan att för alla $x > 10^{12}$ gäller att $|f(x) - 13| < 10^{-15}$. Gäller att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 13$?

- 2.5 Visa med hjälp av instängningssatsen att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arctan x}{x^2 + 1} = 0$.

- 2.6 Då $x \rightarrow \infty$ gäller uppenbarligen att $\frac{x^3 + \sin^2 x}{2x + e^{-x}} \rightarrow \infty$.

Bestäm något tal ω sådant att $\frac{x^3 + \sin^2 x}{2x + e^{-x}} > 10^6$ för alla $x > \omega$.

- 2.7 Har $x \sin x$ ett oegentligt gränsvärde då $x \rightarrow \infty$? Motivera ditt svar!

- 2.8 Beräkna med hjälp av räkneregler

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{5 + 7x} \right)^2$,

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x + 1} - \frac{x^3 + x}{x^2 + x + 1} \right)$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x} + 1} \right)$,

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin 3x + 3x^5}{1 - x + 2x^5}$,

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{1 + x} - x \right)$.

- 2.9 a) För vilka positiva heltal n och m existerar gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)?$$

- b) Vad blir gränsvärdet i dessa fall?

2.10 Bestäm gränsläget för skärningspunkten mellan linjerna

$$3x + 5y = 1 \text{ och } (2 + c)x + 5c^2y = 1 \text{ då } c \rightarrow \infty.$$

2.11 Beräkna med hjälp av räkneregler

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right),$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n} \right),$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}} \right],$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n \cdot 4^{n+3}}{7n \cdot 2^{2n+1} + n \cdot \sin n^2}.$

2.12 En boll släpps från 3 m höjd. Efter varje studs stiger bollen till $1/3$ av sin föregående höjd. Hur lång sträcka tillryggalägger bollen innan den stannar?

2.13 Använd instängningssatsen för att visa att

a) $\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) \rightarrow 1 \text{ då } n \rightarrow \infty,$

b) $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty \text{ (} n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \text{)}.$

2.14 Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right).$

Ledning: Visa att

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \cdot \frac{1}{2}.$$

2.15 Använd standardgränsvärdena $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ för att beräkna

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2n})^{-2},$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{4n^3} + n \sqrt[n]{10}}{2 + 3n},$

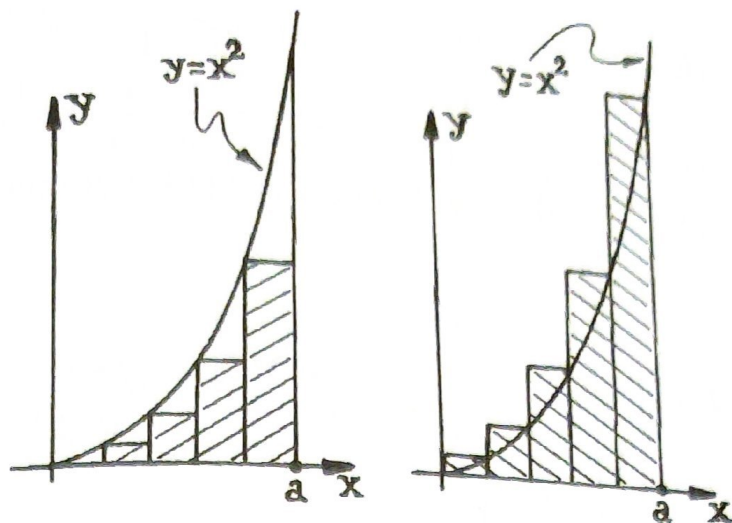
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 10},$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$

(Använd instängningssatsen i c) och d).)

2.16 a) Då $n \rightarrow \infty$ så gäller att $(\frac{3}{5})^n \rightarrow 0$. Bestäm något tal N så att $0 < (\frac{3}{5})^n < 10^{-3}$ för alla $n > N$.

b) För alla positiva heltal är $\sqrt[n]{3} > 1$. Vidare så gäller att $\sqrt[n]{3} \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$. Bestäm något tal N sådant att $0 < \sqrt[n]{3} - 1 < 10^{-4}$ för alla $n > N$.

2.17 I figuren nedan har vi ritat kurvan $y = x^2$. Intervallet $[0, a]$ är indelat i n lika stora delintervall, och med dessa som baser är rektanglar uppritade enligt figuren.



Låt s_n respektive S_n vara summan av de "inre" respektive "yttre" rektanglarnas areor.

a) Visa att

$$s_n = \frac{a^3 (2n^2 - 3n + 1)}{6n^2} \text{ och att } S_n = \frac{a^3 (2n^2 + 3n + 1)}{6n^2}$$

Ledning: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) / 6$ (se avnitt 1.10, sid. 1.10).

b) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

c) Hur kan resultatet i b) tolkas geometriskt?

2.18 Avlägsna från intervallet $[0, 1]$ ett öppet intervall med längden $\frac{1}{4}$ och mittpunkt i $\frac{1}{2}$. Avlägsna sedan (steg 2) från vart och ett av de båda återstående intervallen ett öppet intervall med längden $(\frac{1}{4})^2$ och mittpunkt i centrum av respektive intervall. I steg 3 avlägsnas från vart och ett av de 4 återstående intervallen ett öppet intervall med längden $(\frac{1}{4})^3$ och mittpunkt i centrum av respektive intervall. Förfarandet upprepas n gånger.

a) Låt $l(n)$ vara totala längden av de intervall som återstår efter steg n . Bestäm $l(n)$.

b) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} l(n)$.

2.19 Undersök, då $x \rightarrow \infty$

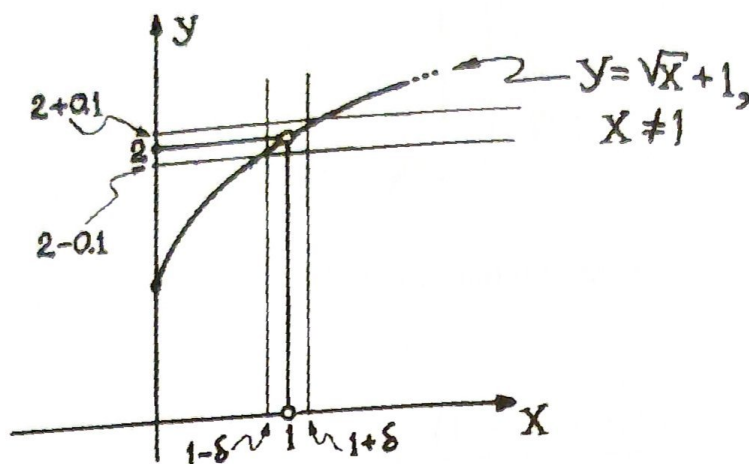
a) $\frac{x^3 + 4x + 1}{3x - 2x^2 + 100}$, b) $x |\cos x|$, c) $x |2 + \cos x|$,

d) $3x + \frac{\sin x^2}{x}$, e) $\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 + x^2}$. (Motivera dina svar.)

2.20 Sätt $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Visa att $s_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$. Ledning: Gör en uppskattning.

2.21 Visa att $\frac{3^n + \cos(n^2 + 1)}{2^{n+7} + 1} \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$.

- 2.22 I exempel 2.18 och 2.19 visade vi att $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$. Bestäm något tal δ sådant att avvikelsen mellan $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ och 2, dvs. $\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 \right|$ är mindre än a) 0.1, b) 0.01, c) 10^{-6} för alla $x \neq 1$ vars avstånd till 1 är mindre än δ .



Ledning: Utnyttja att $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x}+1$.

- 2.23 I exempel 2.20 visade vi att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

a) Bestäm något tal δ så att $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 10^{-2}$ för alla $x \neq 0$ vars avstånd till 0 är mindre än δ .

b) Visa att felet i approximationen $\sin x \approx x$ är mindre än $0.5 \cdot 10^{-3}$ om $|x| \leq 1/10$.

Ledning: Använd olikheterna $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, $0 < 1 - \cos x \leq x^2/2$, som gäller för $0 < |x| \leq \pi/2$. (Se exempel 2.20).

- 2.24 Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$. Ledning: Använd instängningssatsen.

- 2.25 a) Rita kurvan $y = \frac{x}{|x| + x^2}$, $x \neq 0$.

b) Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x| + x^2}$ och $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x| + x^2}$.

Har $\frac{x}{|x| + x^2}$ något gränsvärde då $x \rightarrow 0$?

- 2.26 Det är lätt att inse att $\frac{x^2-1}{x-4} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 4+$, dvs. att det är möjligt att få $\frac{x^2-1}{x-4}$ bli godtyckligt stort för alla x större än 4 som ligger tillräckligt nära 4.

a) Bestäm något tal δ sådant att $\frac{x^2-1}{x-4} > 10^7$ för alla x sådana att $4 < x < 4 + \delta$.

b) Visa att hur stort man än väljer talet λ så kan man alltid hitta ett tal δ sådant att

2.11 Övningar
 $\frac{x^2-1}{x-4} > \lambda$ för alla x sådana att $4 < x < 4 + \delta$. Ledning: Vad kan sägas om $x^2 - 1$ om $x > 4$?

2.27 Man kan visa att funktionen

$$\frac{e^{3x} - e^{-x}}{x}$$

har ett gränsvärde då $x \rightarrow 0$. Försök att gissa detta genom att experimentera, dvs. genom att beräkna funktionsvärdena för några x -värden som närmar sig 0.

2.28 Beräkna med hjälp av räkneregler

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 3},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1},$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} \right).$

2.29 För vilka värden på a existerar gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 5ax + a^2}{x - 1}$?
 Bestäm gränsvärdet för dessa a .

2.30 Beräkna

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{ om } f(x) = x^2 - x.$$

Detta gränsvärde kallas för derivatan av f i punkten $x = 2$.

2.31 Beräkna med hjälp av räkneregler och kända gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x},$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{2x},$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x}.$

2.32 Beräkna gränsläget för skärningspunkten mellan linjerna $3x + 5y = 1$ och $(2+c)x + 5c^2y = 1$ då $c \rightarrow 1$. (Observera att linjerna sammanfaller för $c = 1$). (Jämför med övning 2.10.)

2.33 Har funktionen f definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{om } x < 1, \\ 0 & \text{om } x = 1, \\ 4 - x & \text{om } x > 1, \end{cases}$$

något gränsvärde då $x \rightarrow 1$? Ledning: Undersök vänster- och högergränsvärdena var för sig.

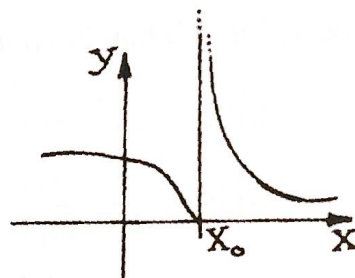
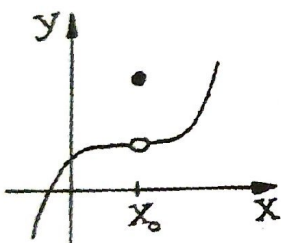
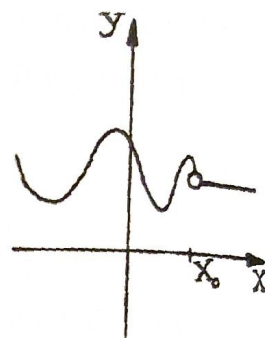
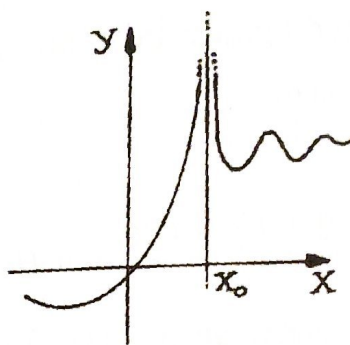
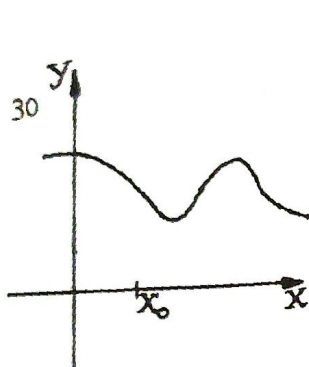
2.34 Undersök

- a) $\frac{1-2x^2}{(1-x)^2}$ då $x \rightarrow 1^-$ och $x \rightarrow 1^+$, b) $\frac{1-2x^2}{1-x^2}$ då $x \rightarrow 1^-$ och $x \rightarrow 1^+$,
 c) $\frac{\sin x}{x^2}$ då $x \rightarrow 0^-$ och $x \rightarrow 0^+$, d) $\frac{\sin 1/x}{x^2}$ då $x \rightarrow 0^-$ och $x \rightarrow 0^+$.

2.11.2 Kontinuitet

2.35 I nedanstående figur illustreras 5 funktioner. Avgör med hjälp av figurerna vilken eller vilka av funktionerna

- a) som är kontinuerlig i punkten x_0 ,
 b) som har en hävbar diskontinuitet i punkten x_0 .



2.36 Bestäm a så att funktionen f definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2x - 2 & \text{om } x \leq 1 \\ 2ax - 1 & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $x = 1$ och så att $f(-1) = -5$. Rita därefter kurvan $y = f(x)$.

2.37 Låt f vara definierad genom $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ för $x \neq -1$ och $x \neq 1$.
 Undersök om man kan definiera f i punkterna -1 och 1 så att f blir kontinuerlig i dessa punkter.

- 2.38 Med $\lfloor x \rfloor$ menas största heltal $\leq x$. T.ex. så är $\lfloor 7.63 \rfloor = 7$ och $\lfloor -6.8 \rfloor = -7$. Sätt $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
- a) Rita kurvan $y = f(x)$.
- b) För vilka x är f diskontinuerlig?

2.11 Övningar

- 2.39 Låt f vara den funktion som definieras av $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Visa att man kan välja $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i $x = 0$. Ledning: $|\sin t| \leq 1$ för alla t .

- 2.40 Funktionen f definieras genom $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}$.
För vilka x är funktionen f kontinuerlig?

- 2.41 Sätt $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^2}{(1 + x^2)^k}$.
Visa att f är diskontinuerlig för $x = 0$.

2.11.3 Gränsvärde av sammansatta funktioner

- 2.42 Bestäm följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(\sqrt{e} + \frac{1}{x^2})$,

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos^2 x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^3-1} + x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{1+2x+x^2}{x^2+17}\right)$,

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln(1+2x^3) - 3 \ln(1+3x^2))$.

- 2.43 Beräkna följande gränsvärden (utnyttja att $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 18x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$,

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$,

f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$,

g) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, där α är angiven i grader.

- 2.44 Använd knepet med förlängning med konjugatkvantiteten för att beräkna

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+2x+x^2}-2}{5x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+13}-4}$,

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+3x+2x})$,

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^2+1}-x^2)$.

2.45 Bestäm följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$ (sätt $y = \sqrt[6]{x}$),

b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt[3]{x} - 2}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x} \right)$.

2.46 Enligt den speciella relativitetsteorin gäller att den kinetiska energin för en partikel med massan m och hastigheten v är

$$T(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2$$

där c är ljushastigheten. Partikelns kinetiska energi enligt den klassiska mekaniken är $\frac{1}{2}mv^2$.

a) Beräkna $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{T(v)}{mv^2/2}$. Slutsats? b) Beräkna $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{T(v)}{mv^2/2}$. Slutsats?

2.47 Låt x_1 vara den av rötterna till ekvationen $ax^2 - 4x + 3 = 0$ som har minsta absolutbeloppet. Beräkna $\lim_{a \rightarrow 0} x_1$. Vad händer med den andra roten då $a \rightarrow 0$?

2.48 Bestäm följande egentliga och oegentliga gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(3x^2 + 1)$, b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$,

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x + 2}{\cos^2 x}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ (Sätt $x = 1/t$).

I a) och b) antas känt att $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \infty$ och $-\frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow -\infty$.

2.11.4 Monotona talföljder

2.49 Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är definierad genom rekursionsformeln

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2} \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

- Rita en figur som illustrerar rekursionsformeln. (Jämför med exempel 2.45.)
- Visa t.ex. med induktion att $a_n \leq 1$ för alla n . (Jämför med figuren i a.)
- Visa att talföljden är växande, dvs. att $a_{n+1} - a_n \geq 0$ för alla n . (Jämför med figuren i a.)
- Om du lyckats klara b) och c) så vet du att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ existerar. Beräkna

gränsvärdet genom att "gå i limes med rekursionsformeln". (Jämför med exempel 2.45.)

2.50 Antag att en talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är definierad genom $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}. \end{cases}$ Visa att talföljden är växande och uppåt begränsad av 2 (använd induktion) och beräkna gränsvärdet.

2.51 Av Sats 2.6 följer att $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10}$ existerar, ty talföljden $\sqrt{10}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[4]{10}, \dots$ är uppenbarligen avtagande och vidare är $\sqrt[n]{10} > 1$ för alla n . Visa att gränsvärdet av talföljden måste vara 1. Ledning: Antag att gränsvärdet är A och att $A > 1$. Visa att detta leder till en motsägelse.

2.52 Utnyttja standardgränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ för att bestämma de av följande gränsvärden som existerar.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n},$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+2},$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2n})^n,$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{3n+2})^{2n-3},$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2},$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n,$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n.$ (Ledning för g): Sätt $n = m + 1$.)

2.53 Bestäm a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x,$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+4}{x+1})^{-x}.$

2.54 Bestäm gränsvärdet av talföljden $1.3, 1.03^{10}, 1.003^{100}, 1.0003^{1000}, \dots$

2.55 Utnyttja att $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ då $n \rightarrow \infty$ för att bestämma ett approximativt värde på $1.0023^{950}.$

2.56 Janne Tappman har bestämt sig för att varje dag under sin n ($n \geq 2$) dagar långa semester ta sig en smutt ur en flaska innehållande 75 cl 40 procentig alkohol. Han fixerar den dagliga smutten till $100/n$ cl. För att inte hans dagliga firande ska märkas håller han efter varje smutt tillbaka samma mängd rent vatten.

a) Beräkna alkoholkoncentrationen i flaskan vid semesterns slut. (Vi antar att man kan bortse från den volymkontraktion som i realiteten sker, då man blandar alkohol med vatten.)

b) Bestäm gränsvärdet av koncentrationen i a) då $n \rightarrow \infty$.

2.11.5 Standardgränsvärden

2.57 Enligt våra resultat gäller att $\frac{e^x}{x^{100}} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$. Trots detta är uttryckets värde för $x = 100$ ungefär $2.7 \cdot 10^{-157}$. Är detta en motsägelse?

2.58 Använd lämpligt standardgränsvärde för att beräkna

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^5)}{\sqrt{n}}$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x^{1000}}{1.001x}\right)$,

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot 3^x + (\ln x)^4}{(4x+1)3^x + x^{17}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 8x^2} + (\ln x)^7 \sqrt{x}}{3x^{103} \cdot e^{-0.001x} - \sqrt{4x^2 + 7x}}$,

f) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[3]{x} \ln x^4$,

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 1}{(2^n + n^4)^2}$.

2.59 Använd omskrivningen $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, ($f(x) > 0$) samt lämpliga standardgränsvärden för att beräkna

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

2.60 Utnyttja att $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$ och att $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$ för att bestämma de av följande gränsvärden som existerar.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \ln(1 + \sqrt{x})$,

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{4x}}{5x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^{cx} - e^{dx}}$,

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln 3}{x}$,

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$ (Ledning: $2 = e^{\ln 2}$).

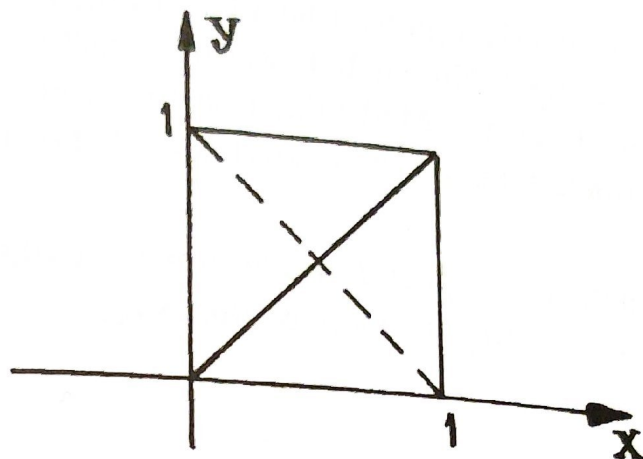
2.61 Vilken av funktionerna x^x och e^{x^2} växer snabbast då $x \rightarrow \infty$?

2.11.6 Egenskaper hos kontinuerliga funktioner

2.62 Visa att ekvationen $8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 = 0$ har en rot i vart och ett av intervallen $[0, 1]$, $[1, 2]$ och $[2, 3]$.

- 2.63 Vi observerar att för funktionen $f(x) = x + 1/x$ gäller att $f(-1) = -2$ och $f(1) = 2$. Följer av detta att det finns ett tal c , $-1 < c < 1$ sådant att $f(c) = 0$?
- 2.64 Visa att ekvationen $(x + 1)e^{-x} = 1/2$ har minst två reella rötter.

- 2.65 a) Funktionen f är kontinuerlig i $[0, 1]$ och $0 < f(x) < 1$ för alla x i detta intervall. Visa att det finns minst ett tal c i $(0, 1)$ sådant att $f(c) = c$. (Undersök funktionen $f(x) - x$.)
- b) Den geometriska tolkningen av övning 2.65a) är att kurvan $y = f(x)$ skär den heldragna diagonalen i kvadraten i nedanstående figur. Visa att kurvan $y = f(x)$ även måste skära den streckade diagonalen.



- 2.66 Avgör om följande funktioner är begränsade i mängden Ω .

a) $(x \sin x)^2$, $\Omega = \mathbb{R}$,

b) $\frac{x}{2-x}$, $\Omega = (2, \infty)$,

c) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$,

d) $\frac{x^4}{1+x^4}$, $\Omega = \mathbb{R}$,

e) $x^{100} + 11x^3 - 17$, $\Omega = [0, 2]$,

f) $\ln |\cos x|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$.

- 2.67 Bestäm största och minsta värdena, om de existerar, till funktionen f om

a) $f(x) = x^2 + x - 6$, $1 \leq x \leq 3$,

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

c) $f(x) = |x^2 - 1| - x$, $-2 \leq x \leq 2$,

d) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Ledning för d): Skriv $f(x)$ på formen $A \sin(x + \varphi)$.