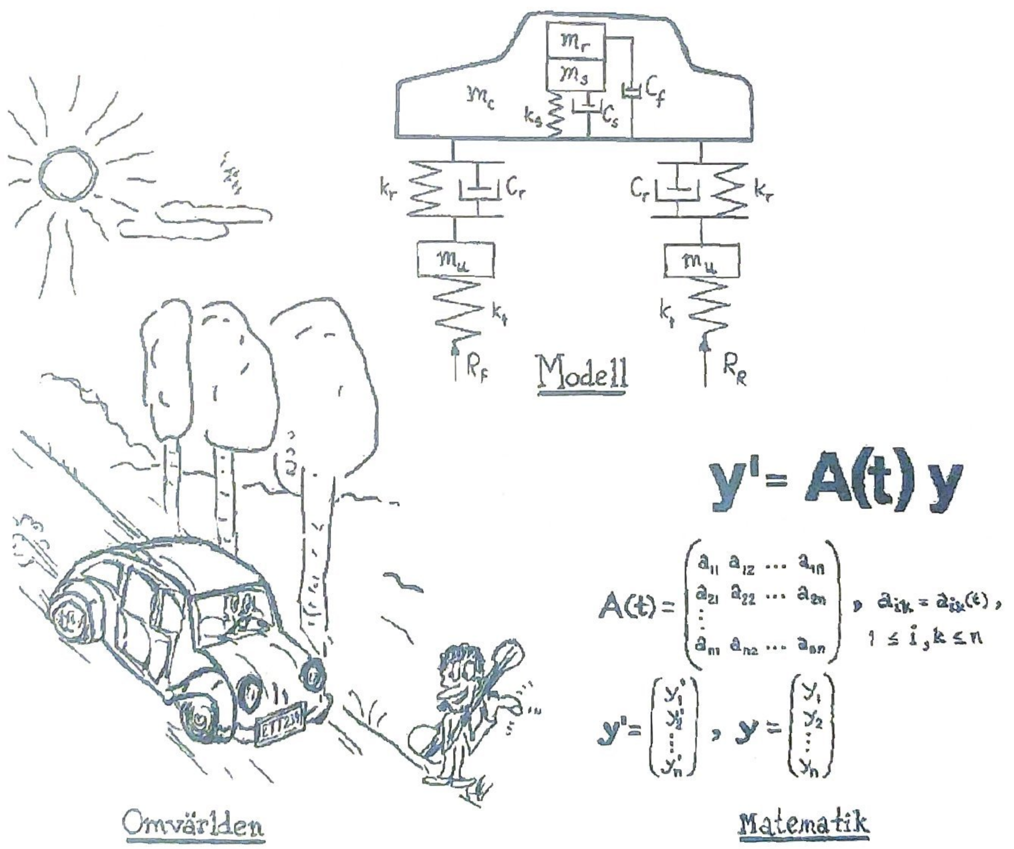
1 Grunder

1.1 Inledning



Matematiken har växt fram ur behovet av att kunna beskriva företeelser i omvärlden; räkna får, mäta markbitar, bygga pyramider, utreda planetbanor, förklara varför en smal axel kan vara att föredra framför en tjock, se till att broar håller, uppskatta väntetider i köer, etc. För att förklara olika fenomen eller förutsäga händelser gör man modeller av omvärlden, modeller som givetvis alltid är förenklingar och därmed approximationer. Så länge modellen fungerar, dvs. ger resultat som på ett rimligt sätt överensstämmer med experiment eller annan erfarenhet, så är den bra. För att få användbara modeller måste man ibland utveckla nya teorier, som i sin tur kan ge impulser till förbättringar av modellerna. Men matematiken utvecklas också inom sig, utan direkta blickar på tillämpningarna.

För det som kallas "ingenjörsmatematik" är just samspelet mellan modell och matematik av allra största betydelse men det finns ingen motsättning mellan de olika delarna av matematiken.

1.2 Logik

Matematiken är logiskt uppbyggd med strikt definierade begrepp och bevisade satser. I denna bok kommer vi emellertid inte alltid att genomföra logiskt oantastliga bevis utan vi kommer ofta nöja oss med antydningar och troliggöranden. Det är dock viktigt att behärska de grundläggande logiska begreppen och att förstå vad som menas med ett matematiskt bevis.

För att *bevisa* ett påstående måste man prestera logiskt hållbara argument som gäller *allmänt* och inte bara i ett eller några speciella fall. Från iakttagelsen att

$$\begin{aligned} &1 &&= 1^2, \\ &1+3 &&= 2^2, \\ &1+3+5 &&= 3^2, \\ &1+3+5+7 &&= 4^2, \end{aligned}$$

kan man *inte* dra slutsatsen att summan av de n första udda positiva heltalen är n^2. Däremot verkar kanske iakttagelsen att vara så slående att det kan vara värt att försöka åstadkomma ett bevis. Det skulle kunna gå till så här:

Påstående: Summan av de n första udda positiva heltalen är n^2.

Bevis: Antag att n är ett godtyckligt positivt heltal. Låt s beteckna summan av de n första positiva udda heltalen. Eftersom talet $2n-1$ är det n:te positiva udda heltalet är blir summan

$$s = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1).$$

Vi skriver upp summan s en gång till i omvänd ordning, dvs.

$$s = (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \ldots + 3 + 1.$$

Om vi adderar de två uttrycken får vi

$$\begin{aligned} 2s &= (1+2n-1) + (3+2n-3) + \ldots + (2n-3+3) + 2n-1+1 = \\ &= 2n + 2n + 2n + \ldots + 2n + 2n = 2n^2 \end{aligned}$$

eftersom antalet termer i summorna är n. Därmed har vi *bevisat* att $s = n^2$, dvs. vi har visat att vårt påstående gäller generellt.

För att bevisa att något är falskt räcker det med *ett enda motexempel*. Sätt t.ex $A_n = n^2 - n + 41$. En kontroll visar att A_n är ett primtal för $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20$.

(Med primtal menar vi ett heltal > 1, som inte kan skrivas som produkt av andra heltal > 1). Det är frestande att gissa att A_n är ett primtal för *alla* positiva heltal n. Men så är inte fallet. Om man prövar vidare finner man visserligen att A är primtal även för $n = 21, 22, \ldots, 39, 40$, men vi får $A_{41} = 41^2$, dvs. A_{41} är en jämn kvadrat och alltså inte något primtal. Vi har därmed hittat ett motexempel och påståndet att A_n är ett primtal för alla n är alltså falskt.

Följande klassiska bevis av den grekiske matematikern Euklides (cirka 300 f Kr) får stå som modell för en rätt vanlig typ av logiska resonemang, s.k. *motsägelsebevis.*

Påstående: Det finns oändligt många (positiva) primtal.

Bevis: Antag att påståendet är falskt, dvs. att det finns ett största primtal, som vi betecknar med P. Följden av alla primtal kan då skrivas

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots, P.$$

Bilda sedan produkten av *alla* primtal och addera talet 1. Detta ger

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot P + 1.$$

Uppenbarligen gäller $N > P$, varför, enligt vårt gjorda antagande, N inte kan vara primtal. Men inget av primtalen är faktor i N eftersom vi alltid får resten 1 vid division med något av primtalen. Men varje heltal, som inte självt är ett primtal, kan delas upp i primfaktorer. Därför måste N vara ett primtal och det finns således primtal som är större än P. Detta strider mot vårt antagande, som alltså leder till en motsägelse. Alltså är vårt antagande falskt. Påståendet är därmed bevisat.

I stället för att tala om påståenden använder man ofta i matematiken ordet *utsaga.* En utsaga kan vara mycket enkel, t.ex. *"Huset är blått"*. Påståendet *"Det finns oändligt många primtal"* är ett annat exempel på en utsaga. En utsaga kan vara sann eller falsk. Huruvida en utsaga är sann eller falsk beror ofta på någon ingående "variabel". I så fall talar man om en *öppen utsaga.* Några exempel på öppna utsagor är *"Talet n är delbart med 7"*, *"Pojken heter Kalle"*, "$x < 3$". Även en ekvation som t.ex. $x^3 + 2x + 1 = 0$ uppfattar vi som en öppen utsaga; likhet gäller kanske för vissa värden på x och inte för andra.

Inom matematiken förekommer ofta påståenden, dvs. utsagor, av typen "Om ..., så...". Vi har till exempel:

Om f är deriverbar, så är f kontinuerlig.
Om n^2 är udda, så är n udda.
Om a är negativt, så är dess belopp lika med $-a$.
Om mellan sidlängderna a, b och c i en triangel råder sambandet $a^2 + b^2 = c^2$ så är triangeln rätvinklig.
Om $x = 3$, så gäller $x^2 + 6x - 27 = 0$.

Utsagan "om A, så B" skrivs ofta med en *implikationspil*: "$A \Rightarrow B$". Detta läser man i så fall gärna som: "A medför B".

Exempel 1.1 Om utsagorna A och B definieras genom $A : x = -2$ respektive $B : x^2+x-2 = 0$ så gäller uppenbarligen $A \Rightarrow B$ (eftersom $(-2)^2+(-2)-2 = 0$). Däremot gäller inte $B \Rightarrow A$, ty om B är sann även då $x = 1$.

Exempel 1.2 För utsagorna A : "Talet n är udda" respektive B : "Sista siffran i talet n är 5" så gäller inte $A \Rightarrow B$ medan däremot $B \Rightarrow A$ är sant.

Utsagan $A \Rightarrow B$ kan gärna skrivas $B \Leftarrow A$ om det är mer ändamålsenligt. Däremot får man inte förväxla $A \Rightarrow B$ med $A \Leftarrow B$.

Exempel 1.3 Påståendet "$\sin x = 1/2$ om $x = \pi/6$" skriver man med fördel "$\sin x = 1/2 \Leftarrow x = \pi/6$". (Här skulle det bli fel om man bytte pilens riktning.)

För påståendet $A \Rightarrow B$ finns följande alternativa omskrivningar (eller om man så vill, översättningar).

Om A, så B
B om A
A är ett tillräckligt villkor för B
B är ett nödvändigt villkor för A
A endast om B
A medför B
A implicerar B

I de fall då man har *både* $A \Rightarrow B$ och $B \Rightarrow A$ skriver man oftast $A \Leftrightarrow B$ och läser detta: "A om och endast om B" eller "A är *ekvivalent* med B". Ibland uttrycker man i stället detta genom att säga att "A är ett nödvändigt och tillräckligt villkor för B".

Exempel 1.4 Låt utsagan A vara att $x = 1$ eller $x = 5$ och låt utsagan B vara $x^2 - 6x + 5 = 0$. Här har vi att $A \Rightarrow B$ men även att $B \Rightarrow A$. Vi skriver $A \Leftrightarrow B$.

Euklides klassiska bevis på sidan 13 är ett exempel på ett indirekt bevis eller ett motsägelsebevis. För att kunna genomföra ett sådant krävs att man på ett korrekt sätt kan formulera negationen av den utsaga som man vill bevisa. Vi tänker oss då att resonemanget förs inom en viss grundmängd.

Definition 1.1 Med *negationen* av en utsaga A menar vi den utsaga som är sann då A är falsk och falsk då A är sann. Vi betecknar denna utsaga med $icke\text{-}A$.

Ett annat beteckningssätt som ibland förekommer är $\sim A$.

Definitionen av negationen av en utsaga innebär att utsagan $A \Rightarrow B$ är ekvivalent med utsagan $icke\text{-}B \Rightarrow icke\text{-}A$.

Exempel 1.5 Låt A vara utsagan "alla fåglar kan flyga". Utsagan *icke-A* blir då "det finns en fågel som inte kan flyga".

Exempel 1.6 Låt A vara utsagan "ekvationen $x^4 + 2x + 5 = 0$ har (minst) en reell rot". Utsagan *icke-A* blir då "$x^4 + 2x + 5 \neq 0$ för alla reella tal x".

Vi belyser användningen med ytterligare ett exempel på ett motsägelsebevis.

Påstående: Om n^2 är ett jämnt heltal så är n också jämnt.

Bevis: Vi låter A vara utsagan att n^2 är jämn och B utsagan att n är jämn. Den grundmängd vi håller oss till utgörs av alla heltal.

Vi vill visa att $A \Rightarrow B$. Översatt till påståenden är detta i sin tur detsamma som *icke-B* $\Rightarrow$ *icke-A*.

Vi är alltså klara om vi kan visa följande: Om n *inte* är jämnt, så är *inte* n^2 jämnt. Med andra ord: Om n är udda, så är n^2 udda. Men varje udda heltal kan skrivas på formen $2k + 1$, där k är ett heltal. Vi sätter $n = 2k + 1$ och kvadrerar vilket ger

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

som är udda, ty $2(2k^2 + 2k)$ är jämnt. Påståendet är därmed bevisat.

1.3 Ekvationslösning

En vanlig ekvation är ett slags utsaga. Att lösa ekvationen brukar litet slarvigt innebära att man skriver upp ett antal ekvationer efter varandra och så småningom kommer fram till något som man säger är ekvationens lösning.

I detta avsnitt ska vi analysera hur det egentligen går till och vad det är man gör när man skriver upp dessa ekvationer efter varandra. Det är inte nödvändigt, men det visar sig ofta fördelaktigt, att skriva ut implikationspilar för att skapa logisk klarhet då man löser ekvationer och ekvationsssystem.

Vi illustrerar den logiska tankegången med några exempel.

Exempel 1.7 Lös ekvationen $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Lösning: Detta är ju en enkel andragradsekvation och lösningen kan lätt fås med en formel som är känd från skolan. Vi ska emellertid här försöka vara omsorgsfulla och med hjälp av logik och implikationspilar reda ut vad det är man egentligen gör när man använder en sådan formel.

I själva verket ersätter vi den givna ekvationen med en serie *ekvivalenta* påståenden. Genom kvadratkomplettering får vi

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)^2 - 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)^2 = 4$$

$$\Updownarrow$$

$$x+1 = 2 \text{ eller } x+1 = -2$$

Det sista påståendet är alltså ekvivalent med den ursprungliga ekvationen. Vad vi har visat är att *om* ekvationen är uppfylld så gäller $x = 1$ eller $x = -3$. Vi har också visat att *om* $x = 1$ eller $x = -3$ så är ekvationen uppfylld. Vi säger därför att lösningen är $x = 1$ eller $x = -3$.

Exempel 1.8 Lös ekvationen $x^3 = x^2 + 2x$.

Lösning: Vi löser även denna gång ekvationen genom att ersätta den med ett antal ekvivalenta utsagor.

$$x^3 = x^2 + 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \text{ eller } x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \text{ eller } x = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \text{ eller } x = -1 \text{ eller } x = 2.$$

Ekvationen är således ekvivalent med den sista utsagan, dvs. ekvationens lösning utgörs av talen 0, -1 och 2.

Exempel 1.9 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(y-x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} . \tag{1}$$

Lösning: Från den första ekvationen följer $x = 0$ eller $y - x = 0$, dvs. $x = 0$ eller $y = x$. Dessa båda möjligheter kombineras sedan med den andra ekvationen. Vi ser att $x = 0$ ger $y^2 = 4$, dvs. $y = 2$ eller $y = -2$ och att $y = x$ ger $y^2 + y^2 = 4$, dvs. $y = \sqrt{2}$ eller $y = -\sqrt{2}$. Alltså får vi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Denna lösning kan organiseras på ett mer överskådligt och logiskt sätt genom att använda ekvivalenspilar och behålla ekvationssystemet i varje steg.

$$\begin{cases} x(y-x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ eller } y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} y = x \\ y^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \text{ eller } y = -2 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{2} \text{ eller } y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Observera att när man skriver ekvationssystem med klammerbeteckning, som exempelvis systemet (1.1) sid. 16, så underförstås ordet "och" mellan ekvationerna.

Exempel 1.10 Lös ekvationen $\sqrt{3x^2 + 4} = 2x$.

Lösning: Det är naturligt att kvadrera båda leden, men den ekvation vi då får är *inte* ekvivalent med den ursprungliga. Vi kan däremot skriva (observera den första implikationspilens riktning):

$$\begin{aligned} A \quad : \quad & \sqrt{3x^2+4} = 2x \implies B : 3x^2 + 4 = 4x^2 \iff \\ \iff \quad & C : x^2 = 4 \iff D : \{x = 2 \text{ eller } x = -2\} \end{aligned}$$

Vi kan dock inte av detta dra slutsatsen att ekvationens lösning är $x = 2$ eller $x = -2$. Visserligen gäller $A \Rightarrow D$ men inte $D \Rightarrow A$. Med andra ord: Vi har visat att om ekvationen är uppfylld så är $x = 2$ eller $x = -2$. Däremot har vi *inte* visat att om $x = 2$ eller $x = -2$ så är ekvationen uppfylld. Enklaste sättet att ta reda på om detta gäller är naturligtvis att sätta in $x = 2$ respektive $x = -2$. Vi får:

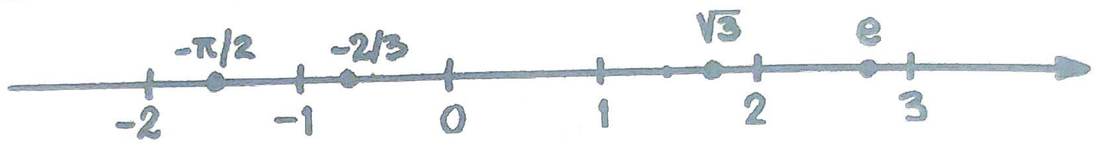
$x = 2$ ger $VL = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = 4$ och $HL = 2 \cdot 2 = 4$ dvs. $VL = HL$.
$x = -2$ ger $VL = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = 4$ och $HL = 2 \cdot (-2) = -4$ dvs. $VL \neq HL$.

Alltså gäller $\sqrt{3x^2 + 4} = 2x \Leftrightarrow x = 2$, dvs. ekvationens lösning är $x = 2$.

1.4 Reella tal

I analysen sysslar man med tal och egenskaper hos tal. I denna kurs skall vi inte gå in på den strängt logiska uppbyggnaden utan accepterar de från gymnasieskolan välkända egenskaperna hos tal och nöjer oss med en repetition av välkända fakta.

För att få en åskådlig bild av talen använder man ofta *tallinjen*.



Man observerar att de rationella talen (dvs. de tal som kan skrivas p/q, $q \neq 0$, p, q heltal) inte räcker för att fylla *hela* tallinjen. Exempelvis finns inget rationellt tal som svarar mot $\sqrt{2}$. Genom att införa *irrationella tal* "fyller man" hela tallinjen, så att mot varje punkt svarar ett reellt tal (rationellt eller irrationellt) och, omvänt, mot varje reellt tal svarar en punkt på tallinjen. De rationella talen har avslutade eller periodiska decimalutvecklingar och de irrationella talen svarar mot oavslutade icke-periodiska decimalutvecklingar.

Exempelvis talen $2/5 = 0.4$, $2/3 = 0.666666\ldots$ (perioden är 6), $4/7 = 0.57142857\ldots$ (perioden är 571428) och $3643/3000 = 1.214333\ldots$ (perioden är 3) är rationella. Däremot är $\sqrt{2} = 1.14142\ldots$ (icke-periodiskt) och $\pi = 3.1415926535897\ldots$ några exempel på irrationella tal.

Man brukar använda följande standardbeteckningar:

$N = \{\text{alla naturliga tal}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$Z = \{\text{alla heltal}\}$,

$Q = \{\text{alla rationella tal}\}$,

$R = \{\text{alla reella tal}\}$.

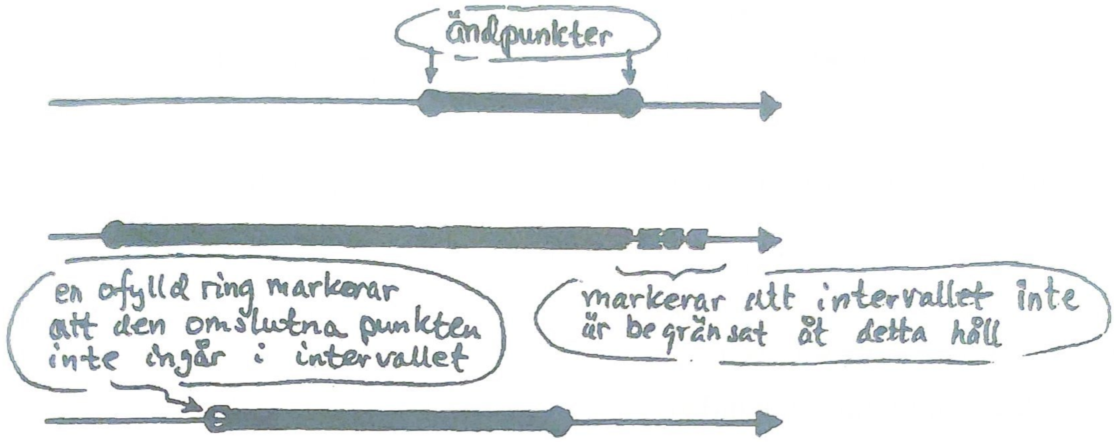
Ibland kommer vi också att använda följande beteckningar:

$Z_+ = \{\text{alla positiva heltal}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$Z_- = \{\text{alla negativa heltal}\}$,

$$Q_+ = \{\text{alla positiva rationella tal}\}\,,$$
$$Q_- = \{\text{alla negativa rationella tal}\}\,,$$
$$R_+ = \{\text{alla positiva reella tal}\}\,,$$
$$R_- = \{\text{alla negativa reella tal}\}\,.$$

Varje sammanhängande bit av tallinjen kallas för ett *intervall*. Med ett *slutet intervall* menas ett intervall där också intervallets ändpunkter ingår. På motsvarande sätt kallar vi ett intervall i vilket inte ändpunkterna inte ingår för ett *öppet intervall*.



Hela tallinjen är också ett intervall. Intervall som är symmetriska kring någon punkt spelar en framträdande roll exempelvis vid gränsvärdesdefinitionen och vid felberäkning. Ett öppet intervall som är symmetriskt kring en viss punkt brukar kallas för en *omgivning* till punkten.

Vi ger en lista över terminologi och beteckningar.

Beteckning	*Benämning*	*Anmärkning*
$[a, b]$	Slutet intervall	Begränsat
(a, b)	Öppet intervall	Begränsat
$[a, b)$	Halvöppet intervall	Begränsat
$(a, b]$	Halvöppet intervall	Begränsat
$[a, \infty)$	Slutet intervall	Nedåt begränsat (ej uppåt)
(a, ∞)	Öppet intervall	Nedåt begränsat (ej uppåt)
$(-\infty, b]$	Slutet intervall	Uppåt begränsat (ej nedåt)
$(-\infty, b)$	Öppet intervall	Uppåt begränsat (ej nedåt)
$(-\infty, \infty) = R$	Hela tallinjen	

Vi påminner vidare om definitionen av *absolutbelopp*. Med absolutbeloppet av ett tal t menar vi talet t självt om $t \geq 0$ och talet $-t$ om $t < 0$. Vi betecknar absolutbeloppet av talet med $|t|$ och har alltså

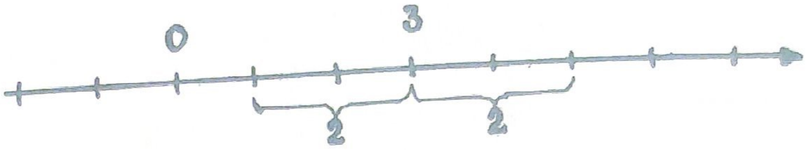
$$|t| = \begin{cases} t, & \text{om } t \geq 0 \\ -t, & \text{om } t < 0 \end{cases}.$$

Exempel 1.11 Beräkna $\sqrt{y^2}$.

Lösning: Med $\sqrt{x}$ menas alltid det *positiva* tal vars kvadrat är x. Därför är $\sqrt{y^2} = y$ om $y \geq 0$, men $\sqrt{y^2} = -y$ om $y < 0$. Alltså är $\sqrt{y^2} = |y|$.

Om a och b är reella tal så kan $|a - b|$ tolkas som avståndet mellan punkterna a och b på tallinjen.

Exempel 1.12 Lös olikheten $|x - 3| < 2$.

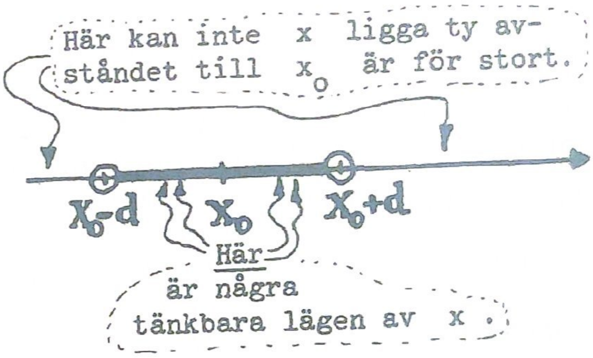


Lösning: Det gäller att hitta alla x på avståndet mindre än 2 från punkten 3.

Vi får alltså $1 < x < 5$, och kan således skriva $|x - 3| < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$. I stället för att skriva $1 < x < 5$ kan vi också skriva $x \in (1, 5)$ där tecknet $\in$ utläses "tillhör". (Se nedan, sid. 22.)

Följande användbara samband är värt att observera:

$$|x - x_0| < d$$
$$\Updownarrow$$
$$-d < x - x_0 < d$$
$$\Updownarrow$$
$$x_0 - d < x < x_0 + d$$

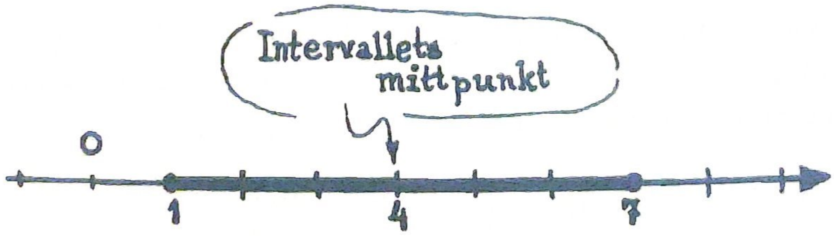


För att inte göra uttryckssättet onödigt komplicerat tillåter man sig ofta att skriva (och säga) "intervallet $a < x < b$" när man menar "intervallet (a, b)" osv.

Exempel 1.13 Skriv intervallet $[1, 7]$ med hjälp av absolutbelopp.

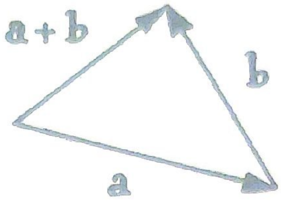
Lösning: Vi har

$$x \in [1, 7] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow -3 \leq x - 4 \leq 3 \Leftrightarrow |x - 4| \leq 3.$$



1.5 Triangelolikheten

Man kan rita de tre vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ så att de utgör sidorna i en triangel (se figur). De tre vektorernas längder ger triangelns sidlängder.



För dessa gäller

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\,, \tag{2}$$

dvs. längden av en sida är mindre än eller lika med summan av de övriga sidornas längder. (Försök att rita en triangel med sidorna 13, 5 och 7 cm.) Detta är anledningen till att olikheten (1.2) kallas för *triangelolikheten*.

För alla reella tal a och b gäller

$$\begin{cases} -|a| \leq a \\ -|b| \leq b \end{cases} \text{och} \begin{cases} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{cases} \tag{3}$$

(eftersom absolutbeloppet av ett tal är det största av talet självt och dess "motsatta" tal). Med hjälp av denna iakttagelse kan vi visa följande sats som också brukar kallas *triangelolikheten*.

Sats 1.1 (Triangelolikheten) *För alla reella tal a och b gäller*

$$|a+b| \leq |a| + |b| \text{ och } |a-b| \leq |a| + |b|\,. \tag{4}$$

Bevis: Addition av olikheterna i (1.3) ger

$$-|a| - |b| \leq a + b \text{ resp. } a + b \leq |a| + |b|\,.$$

Alltså får vi, om vi kombinerar dessa olikheter,

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|\,,$$

som är ekvivalent med första olikheten i (1.4). Den andra får man sedan ur den första:

$$|a-b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|\,.$$

Beviset är därmed klart.

Exempel 1.14 Om $|x-1| < 2$ och $|y-1| < 2$ så gäller $|x-y| < 4$, ty

$$|x-y| = |(x-1) + (1-y)| \leq \underbrace{|x-1|}_{<2} + \underbrace{|1-y|}_{<2} < 4.$$

Exempel 1.15 Antag att a ligger på avståendet högst 0.1 ifrån 1.2 och b ligger högst 0.2 ifrån 2.5. Hur långt från 1.3 ligger då $b - a$?

Lösning: Vi observerar först att $1.3 = 2.5 - 1.2$.

$$\begin{aligned} |(b-a) - 1.3| &= |(b-a) - (2.5 - 1.2)| = |(b - 2.5) - (a - 1.2)| \leq \\ &\leq |b - 2.5| + |a - 1.2| \leq 0.2 + 0.1 = 0.3 \end{aligned}$$

Vi finner alltså att $b - a$ ligger högst på avståndet 0.3 ifrån 1.3.

Exempel 1.16 Visa att om $x > 2$ så gäller $\left|\dfrac{x-4}{x^2 + \sin x}\right| < \dfrac{10}{x}$.

Lösning: Vi kallar täljaren för T och nämnaren för N och får då $T = |x - 4| \leq |x| + |4| = x + 4 \leq x + 2x = 3x$. Eftersom $x^2 + \sin x > 0$ (vi har ju att $x > 2$) gäller $N = \left|x^2 + \sin x\right| = x^2 + \sin x$. Men $x^2 + \sin x > x^2 - 1 \geq x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$, där vi utnyttjat $\sin x \leq 1$ och $x > 2$. Av detta följer :

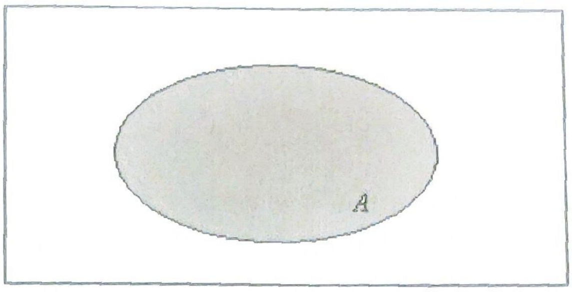
$$\frac{T}{N} \leq \frac{3x}{N} \leq \frac{3x}{\frac{3x^2}{4}} = \frac{4}{x} < \frac{10}{x}.$$

1.6 Mängder

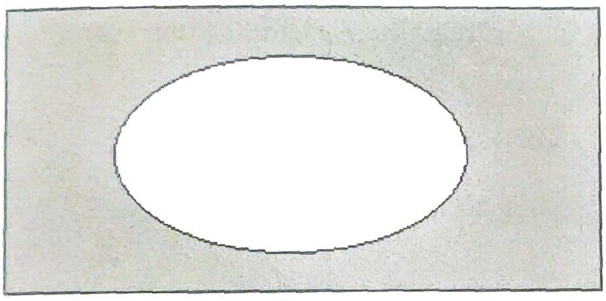
Begreppet mängd är ofta praktiskt när det gäller att formulera matematiska resonemang och påståenden. Med en *mängd* menar vi en samling av ett antal objekt. Objekten i mängden kallar vi för mängdens *element*. Dessa element kan vara tal, men ofta behandlar man mängder som består av helt andra sorters element. Redan på sidan 18 beskrev vi några talmängder; exempelvis Z är mängden av alla hela tal. Även de intervall som vi beskrev på sidan 19 är mängder. I stället för att exempelvis tala om intervallet $(a, b]$ så kan vi tala om mängden av alla reella tal som uppfyller $a < x \leq b$. Detta skriver vi gärna $\{x : a < x \leq b\}$, vilket utläses som i föregående mening. Exempel på andra slags mängder är lätt att hitta; mängden av alla teknologer i Luleå, mängden av alla andragradspolynom osv.

Om x är ett element i mängden A uttrycker vi detta med hjälp av symbolen $\in$ och skriver $x \in A$. Detta utläses "x tillhör A". Om alla element i en viss mängd A är element i en mängd B (dvs. $x \in A \Rightarrow x \in B$) säger vi att A är en *delmängd* av B och skriver $A \subseteq B$. Om A är en delmängd av B och att man särskilt vill betona att det finns element i B som inte är element i A säger man att A är en *äkta delmängd* av B och skriver $A \subset B$. Det har vidare visat sig ändamålsenligt att ha en särskild symbol för den mängd som helt saknar element; den brukar betecknas med $\emptyset$ och kallas den *tomma mängden*.

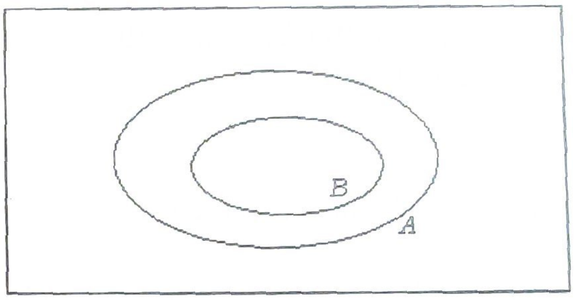
Man tänker sig vidare alltid att alla resonemang rörande mängder förs inom en fix *grundmängd* och att alla mängder som man använder är delmängder av denna fixa mängd. Om nu A är en mängd så är "resten" av grundmängden en mängd som vi kallar *komplementet* till A och betecknar med $\complement A$. Det är ofta praktiskt att symboliskt åskådliggöra mängder och relationer mellan mängder i form av enkla figurer som brukar kallas *mängddiagram* eller *Venn-diagram* efter en engelsk matematiker och logiker.



Man tänker sig då att den yttre ramen begränsar den fixa grundmängden medan själva mängden symboliseras av en mer eller mindre rund figur. I nedanstående figurer illustreras en mängds komplement $\complement A$ samt att $B \subseteq A$.

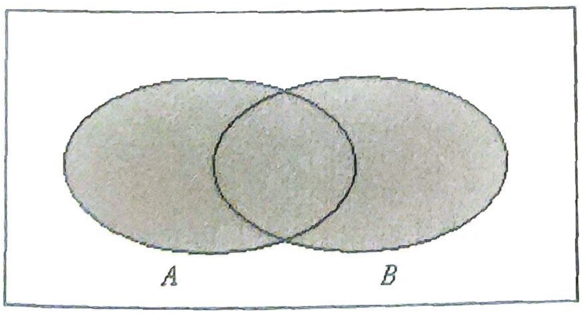


$\complement A$

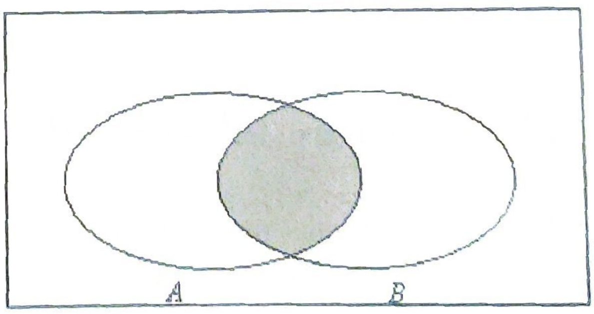


$B \subseteq A$

Vi kan också utföra operationer på mängder; har vi två mängder A och B så kan vi bilda den mängd som består av alla element som ingår i minst en av de två mängderna. Denna nya mängd kallar vi *unionen* av A och B och betecknar med $A \cup B$. Den mängd som består av de element som ingår i både A och B kallar vi för *snittet* av A och B och betecknar med $A \cap B$.



$A \cup B$



$A \cap B$

Exempel 1.17 $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Exempel 1.18 Om $A = \{3,5,7\}$ och $B = \{1,3,4,5\}$ så är $A \cup B = \{1,3,4,5,7\}$ och $A \cap B = \{3,5\}$.

Exempel 1.19 Låt A vara intervallet $(2,7)$ och B intervallet $[5,8]$. Då är $A \cup B$ intervallet $(2,8]$ och $A \cap B$ intervallet $[5,7)$.

1.7 Kvantorer

En matematisk utsaga har ofta formen "för varje $x \in A$ gäller P" eller "det finns ett $x \in A$ för vilket P är falsk". P är här en öppen utsaga med grundmängd A. Sådana utsagor skriver man ofta med hjälp av två s.k. logiska kvantorer som man betecknar med symbolerna $\forall$ resp. $\exists$.

Kvantorn $\forall$ betyder (och utläses) "för varje" eller "för alla". Kvantorn $\exists$ utläses och betyder "det existerar" eller "det finns".

Exempel 1.20 Påståendet att $x^2 - 3x + 3 > 0$ för alla x skulle kunna formuleras på följande sätt

$$\forall x \in R;\ x^2 - 3x + 3 > 0,$$

vilket skulle utläsas "för varje reellt tal x gäller att $x^2 - 3x + 3 > 0$".

Exempel 1.21 Påståendet att ekvationen $x^2 - 3x + 2 = 0$ har en (reell) rot skulle kunna formuleras på följande sätt

$$\exists x \in R;\ x^2 - 3x + 2 = 0,$$

vilket skulle utläsas "det finns ett reellt tal x så att $x^2 - 3x + 2 = 0$".

Det speciellt praktiskt att använda de logiska kvantorerna när man skall formulera negationen av en öppen utsaga. Om vi t.ex har en utsaga $\forall x \in A;\ P$ så är dess negation utsagan $\exists x \in A;\ icke - P$.

1.8 Summa- och produkttecken

Ibland har man anledning att addera åtskilliga termer som byggts upp enligt något speciellt mönster. Till exempel

$$9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 \tag{5}$$

är summan av sju konsekutiva (= på varandra följande) udda heltal. Uttrycket

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 106 + 108 + 110 \tag{6}$$

ger summan av de 55 första jämna positiva heltalen. Varje term i (1.6) är av formen $2k$. Den första termen får vi om vi sätter $k = 1$, den andra om vi sätter $k = 2$, den tredje med $k = 3$ osv. till dess att vi kommer till $k = 55$, som ger $2 \cdot 55 = 110$.

För att kunna skriva summor med många termer använder man en speciell symbol, den grekiska bokstaven Σ (stora sigma), på följande sätt:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 106 + 108 + 110 = \sum_{k=1}^{55} 2k.$$

Allmänt låt $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ vara givna tal. Vi skriver då

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k. \tag{7}$$

Variabeln k kallas för *summationsindex* och Σ för *summatecken*. Högerledet i (1.7) brukar läsas ut så här: "Summan, då k går från m till n, av a_k" eller "summa a_k, då k går från m till n". Det är underförstått att k endast antar heltalsvärden. Med hjälp av summatecken kan (1.5) skrivas (parentesen är viktig här!)

$$9 + 11 + 13 + \ldots + 21 = \sum_{k=4}^{10} (2k + 1),$$

eller

$$9 + 11 + 13 + \ldots + 21 = \sum_{k=5}^{11} (2k - 1).$$

Beteckningen k för summationsindex kan bytas ut mot någon annan bokstav, som t.ex. i, j, m eller n. En ofta förekommande variant är den grekiska bokstaven ν (ny). Vi får för (1.5)

$$\sum_{\nu=1}^{7}(2\nu + 7) = \sum_{i=1}^{7}(2i + 7) = \sum_{j=1}^{7}(2j + 7) = \sum_{n=0}^{6}(2n + 9) = \sum_{m=4}^{10}(2m + 1).$$

Exempel 1.22 Med hjälp av Σ−tecknet får vi möjlighet att skriva följande summor på ett kompakt sätt.

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = \sum_{i=1}^{5} \tfrac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{5} (\tfrac{1}{2})^i,$$

$$\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \ldots \tfrac{1}{99} = \sum_{j=3}^{49} \tfrac{1}{2j+1},$$

$$2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \ldots - 69 = \sum_{k=2}^{69} (-1)^k \cdot k,$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + 104 \cdot 105 + 105 \cdot 106 = \sum_{k=2}^{105} k(k+1),$$

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{103} = \sum_{k=1}^{103} x^k.$$

Ofta skriver man $\sum\limits_{1}^{n} a_k$ istället för $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, om det inte kan uppstå missförstånd beträffande summationsindex. Till exempel kan vi skriva

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots + \frac{5}{2^n} = \sum_{1}^{n} \frac{5}{2^k}.$$

Men så snart det är tveksamt vad som är summationsindex så måste man skriva ut "$k =$" (eller motsvarande). Uttrycket

$$\sum_{1}^{n} k^i$$

är tvetydigt, eftersom det kan tolkas dels som

$$\sum_{k=1}^{n} k^i = 1^i + 2^i + 3^i + \ldots + n^i,$$

dels som

$$\sum_{i=1}^{n} k^i = k^1 + k^2 + k^3 + k^4 + \ldots + k^n.$$

Observera även

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \sum_{k=1}^{6} 4 = 24,$$

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{n \text{ stycken termer}} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

För att på motsvarande sätt skriva produkter kortfattat använder man den grekiska bokstaven Π (stora pi) precis som man använder Σ för summor:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Exempel 1.23 Vi kan skriva

$$5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 35 = \prod_{k=2}^{17} (2k + 1),$$

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 34 + 1 = \prod_{k=2}^{17} 2k + 1,$$

$$2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2048 = \prod_{k=1}^{11} 2^k,$$

$$a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot \ldots \cdot a^n = \prod_{j=1}^{n} a^j,$$

$$4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 64 = \prod_{j=3}^{18} 4(j - 2) = \prod_{k=1}^{16} 4k.$$

1.9 Aritmetiska och geometriska summor

En *aritmetisk summa* är en summa av tal som bildar en aritmetisk följd. En *aritmetisk följd* karakteriseras av att skillnaden mellan två konsekutiva tal hela tiden är konstant. Denna konstanta skillnad kallas den aritmetiska följdens *differens*.

Exempel 1.24 $2, 5, 8, 11, 14, 17$ är en aritmetisk följd, vars differens är 3. Första termen är 2 och sista termen är 17. Följden $2, 5, 7, 10, 12, 15$ är däremot inte aritmetisk.

Summan av en aritmetisk följd får man genom att man skriver upp följden två gånger i motsatt ordning. Sedan lägger man ihop första och sista, andra och näst sista termerna, etc. Vi belyser tekniken med ett exempel.

Exempel 1.25 Betrakta följden $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2k-1, \ldots$ och säg att vi vill räkna ut summan av de nio första talen. Sätt

$$s_9 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17.$$

Då har vi

$$\begin{aligned} s_9 &= 1 + 3 + 5 + \ldots + 15 + 17 \\ s_9 &= 17 + 15 + 13 + \ldots + 3 + 1 \\ \\ 2s_9 &= \underbrace{18 + 18 + 18 + \ldots + 18 + 18}_{\text{9 stycken termer som var och en är lika med 18}}. \end{aligned}$$

Härav får vi direkt

$$s_9 = \frac{9 \cdot 18}{2},$$

ty antalet termer är 9 och summan av den första och den nionde är 18.

Med samma teknik som i exempel 1.25 visar man att om

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

är en aritmetisk summa så gäller

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{8}$$

Exempel 1.26 Ett s.k. amerikanskt lotteri innebär att man har lotter markerade $1, 2, \ldots, 100$ och att varje lott kostar så många kronor som lottens nummer visar. Hur mycket pengar inbringar lottförsäljningen, om alla lotter säljs?

Lösning: Det gäller att bestämma en aritmetisk summa med 100 termer med den första termen 1 och den hundrade termen 100, dvs. $\dfrac{100(1+100)}{2} = 5050$. Man får alltså in 5050 kr.

Exempel 1.27 Vad är summan av de n stycken första positiva udda talen? (Se äve beviset på sid. 12.)

Lösning: Vi skall bestämma $\Sigma_{k=1}^{n}(2k-1)$, som är en aritmetisk summa (me differensen 2) med n termer, med den första termen 1 och den n:te termen $(2n-1)$ Vi får enligt formel (1.8)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2.$$

En *geometrisk följd* är en följd där *kvoten* mellan ett godtyckligt tal i följden och de närmast föregående talet hela tiden är konstant. En *geometrisk summa* är summan av en geometrisk följd.

Exempel 1.28 Följden $4, 8, 16, 32, 64, 128$ är en geometrisk följd med kvoten 2, medan följden $4, 8, 12, 16, 18, 20, 22$ inte är geometrisk.

Den allmänna formeln för en *geometrisk summa* får man enklast genom att först titta på ett specialfall, nämligen följden

$$1, r, r^2, r^3, \dots, r^k, \dots, r^n.$$

där första talet är 1 och kvoten r. Vi betecknar summan av de $n+1$ första termerna med s_{n+1} dvs.

$$s_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} r^k. \tag{9}$$

Då får vi, efter multiplikation med r $(r \neq 0)$,

$$rs_{n+1}=r\sum_{k=0}^{n} r^k=\sum_{k=0}^{n} r^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1} r^k. \tag{10}$$

Subtraherar vi nu (1.10) från (1.9) så blir resultatet

$$\begin{aligned} s_{n+1}-rs_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} r^k-\sum_{k=1}^{n+1} r^k= \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n} r^k-\sum_{k=1}^{n} r^k-r^{n+1}=1-r^{n+1}, \end{aligned}$$

varav följer

$$s_{n+1}(1-r)=1-r^{n+1}.$$

Om $r \neq 1$ ger detta till sist den viktiga och ofta användbara formeln

$$s_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{11}$$

Observera att antalet termer är $n+1$. Formeln gäller under förutsättning att kvoten $r \neq 1$. Fallet $r=1$ ger ju en aritmetisk summa (med differensen 0) och behöver strängt taget inte behandlas här. Vi får ur (1.9) med $r=1$ insatt

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Vi illustrerar användningen av formel (1.11) med några exempel.

Exempel 1.29

$$1+3+9+27+81 = 3^0+3^1+3^2+3^3+3^4 = \frac{1-3^5}{1-3} = 121.$$

Exempel 1.30

$$\sum_{k=0}^{3}(1/5)^k = \frac{1-(1/5)^4}{1-(1/5)} = \frac{156}{125}.$$

Exempel 1.31

$$\sum_{k=0}^{8}(-5)^k = \frac{1-(-5)^9}{1-(-5)} = \frac{1+5^9}{1+5} = 325521.$$

Exempel 1.32 Beräkna $\prod_{\nu=0}^{9} 5^\nu$.

Lösning:

$$\prod_{\nu=0}^{9} 5^\nu = 5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^9 = 5^{0+1+2+\ldots+9} = 5^{\sum_{\nu=0}^{9}\nu} = 5^{45}.$$

Exempel 1.33 Enligt sägnen skall shahen av Persien ha erbjudit schackspelets uppfinnare en belöning som uppfinnaren skulle få välja själv. Denne begärde då att få 1 vetekorn för brädets första ruta, 2 för den andra, 4 för den tredje, 8 för den fjärde etc., dvs. dubbelt upp för varje ruta till och med den sextiofjärde. Shahen, som tyckte att detta var en blygsam belöning, lämnade gillande sitt medgivande. Han blev emellertid rådlös när han fick veta att det begärda antalet vetekorn överskrider tusentals årsskördar vete på hela jorden! Totala antalet korn blir ju

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1 = 18446744073709551615.$$

(Det lär gå cirka ett par tusen korn på 1 liter vete .)

Om första termen i en geometrisk summa inte är 1 så kan man alltid bryta ut den. Kvar innanför parentesen får man en summa med första termen 1.

I. Visa att påståendet gäller för $n = b$, dvs. att P_b är sant.

II. Antag att påståendet gäller för $n = p$ och visa att påståendet i så fall är sant också för $n = p + 1$.

III. Hänvisa till induktionsaxiomet.

Exempel 1.36 Visa att för alla $n \in Z_+$ gäller

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{14}$$

Lösning: Vårt påstående P_n är här likheten (1.14).

I. För $n = 1$ gäller

$$VL = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \text{ och } HL = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Alltså är likheten sann för $n = 1$.

II. Antag att likheten är sann för $n = p$, dvs. att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}. \tag{15}$$

Vi vill visa att det då måste gälla

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{p+2}. \tag{16}$$

Vi observerar nu att om vi adderar $\dfrac{1}{(p+1)(p+1+1)}$ till vänsterledet i antagandet (1.15) så får vi vänsterledet i påstående (1.16). Vänsterledet i (1.16) kan alltså skrivas

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)}}_{=\frac{p}{p+1} \text{ enligt (1.15)}} + \frac{1}{(p+1)(p+1+1)} = \\
&= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \\
&= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}.
\end{aligned}$$

Vi har alltså kommit fram till "rätt högerled" och har visat att (1.16) gäller. Vi har med andra ord visat att om (1.14) är sann för $n = p$ så är (1.14) sann även för $n = p + 1$.

III. Enligt induktionsaxiomet följer nu av **I** och **II** att likheten (1.14) gäller för varje heltal $n \geq 1$.

Exempel 1.37 Visa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \tag{17}$$

Lösning:

I. För $n = 2$ har vi $VL = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ och $HL = 2\sqrt{2} - 1$. Men

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 < 2 \cdot 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9.$$

Således är olikheten sann för $n = 2$.

II. Antag nu att olikheten är sann för $n = p$, dvs. att

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{p}} < 2\sqrt{p} - 1.$$

Vi vill visa att i så fall gäller

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} < 2\sqrt{p+1} - 1,$$

dvs. att olikheten är sann även för $n = p + 1$. Men om

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{p}} < 2\sqrt{p} - 1$$

så får vi

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} < 2\sqrt{p} - 1 + \frac{1}{\sqrt{p+1}}.$$

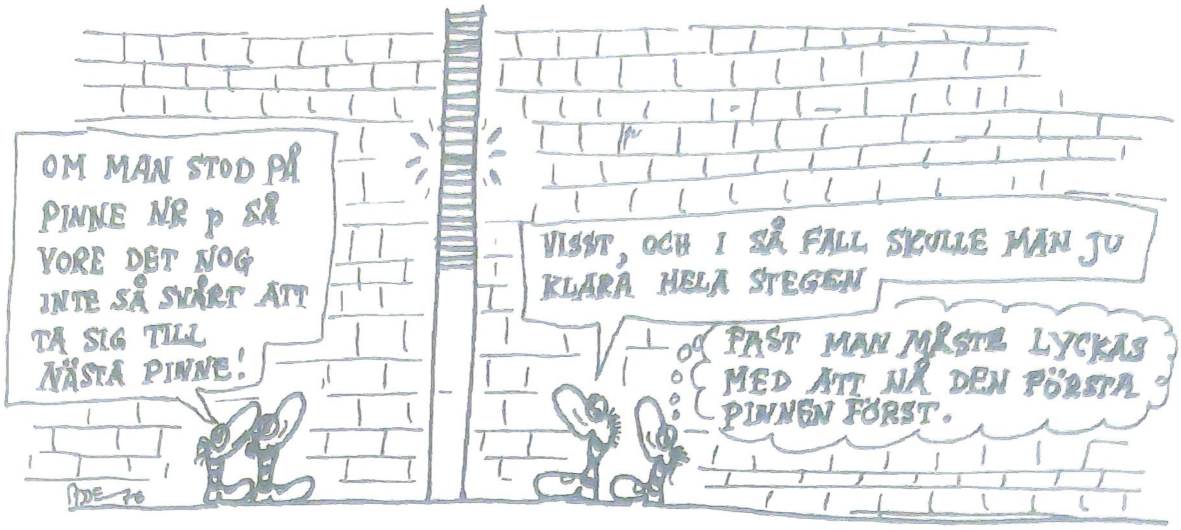
Vi är således klara *om* vi kan visa olikheten

$$2\sqrt{p} - 1 + \frac{1}{\sqrt{p+1}} < 2\sqrt{p+1} - 1,$$

som är ekvivalent med

$$\begin{array}{rcl}
2\sqrt{p}\sqrt{p+1} + 1 & < & 2(p+1) \\
& \Updownarrow & \\
2\sqrt{p}\sqrt{p+1} & < & 2p + 1 \\
& \Updownarrow & \text{(ty båda leden är positiva)} \\
4p(p+1) & < & 4p^2 + 4p + 1 \\
& \Updownarrow & \\
0 & < & 1. \qquad\qquad \text{Klart!}
\end{array}$$

III. Enligt induktionsaxiomet följer av **I** och **II** att olikheten (1.17) är sann för alla $n \geq 2$.



1.11 Permutationer och kombinationer

Hittills när vi talat om mängder så har vi inte tagit hänsyn till elementens ordning; mängden $\{1, 2, 3\}$ och $\{3, 1, 2\}$ är exempelvis samma mängd. Om vi däremot förutsätter att elementen skall räknas upp i en viss ordning så talar vi om en *ordnad mängd*.

Antag nu att vi har en mängd som består av ett ändligt antal element av något slag. Vi antar att antalet element är n och betecknar mängden med $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. På hur många olika sätt kan denna mängd ordnas? Eller annorlunda uttryckt; hur många olika ordnade mängder kan vi skapa med hjälp av dessa element.

Att ordna mängden innebär att vi väljer ett element som det första, sedan ett andra, därefter ett tredje osv. När det gäller att välja det första elementet har vi n olika möjligheter. För var och en av dessa n möjligheter finns det sedan $n - 1$ olika möjligheter att välja det andra. Vi har med andra ord $n(n-1)$ olika sätt att välja de två första elementen. För var och en av dessa $n(n-1)$ möjligheter finns det $n-2$ möjligheter att välja det tredje elementet, dvs. det finns $n(n-1)(n-2)$ olika sätt att välja de tre första.

På detta sätt finner man till sist att det finns $n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt att ordna de n elementen a_k. Uttrycket $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1)n$ förkommer så ofta att man infört ett särskilt namn och en särskild beteckning.

Definition 1.2 Produkten $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1)n$ betecknas med $n!$ och utläses "n-*fakultet*".

Definition 1.3 Låt en ändlig mängd A vara given. En ordnad mängd som består av samtliga element ur A kallas en *permutation* av elementen i A.

Med dessa beteckningar och begrepp kan vi formulera det vi visat i form av följande sats.

Sats 1.2 *Antalet olika permutationer av de n elementen $a_1, a_2, ..., a_n$ är $n!$.*

Exempel 1.38 Hur många olika ord på sex bokstäver kan man bilda genom att kasta om ordningen av bokstäverna i ordet KIRUNA?

Lösning: Varje ord är en permutation av de sex elementen, dvs. bokstäverna, K, I, R, U, N och A. Antalet olika ord är således $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Exempel 1.39 Hur många ord kan man bilda genom att kasta om ordningen av bokstäverna i ordet LULEÅ?

Lösning: Vi ser här att bokstaven L förekommer två gånger. Vi ger först vart och ett av dessa två L en identitet genom indexsiffror, dvs. $L_1UL_2EÅ$. Dessa fem bokstäver kan enligt ovan permuteras på 5! sätt. Vi kan sedan gruppera dessa permutationer parvis, där varje par består av två permutationer som endast skiljer sig åt genom ordningen på L_1 och L_2. Antalet olika ord blir alltså $5!/2 = 60$.

Exempel 1.40 Hur många ord kan man bilda genom att kasta om ordningen av bokstäverna i ordet SALAMANCA?

Lösning: Om vi tänker oss att de 4 A:na har identitet så får vi $9!$ olika permutationer. Dessa kan grupperas så att varje grupp består av permutationer som endast skiljer sig genom ordningen på de fyra A:na. Antalet permutationer i varje grupp är antalet möjliga permutationer av fyra element, dvs. 4!. Antalet olika ord är därför 9!/4!=15120.

Vi ska nu gå över till ett annat problem, nämligen undersöka på hur många sätt man kan bilda ett mängd bestående av k element, valda ur en mängd bestående av n element, $k \leq n$. Vi börjar med ett exempel.

Exempel 1.41 En klass består av 16 elever. Hur många olika fotbollslag (bestående av 11 spelare) kan man bilda i klassen?

Lösning: Den första spelaren kan väljas på 16 sätt, den andre på 15 osv., den elfte på $16 - 10 = 6$ olika sätt. Om vi skulle ta hänsyn till ordningen betyder det att vi skulle kunna bilda $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 16!/5!$ lag. Emellertid bryr vi oss inte om ordningen och konstaterar att dessa lag kan grupperas i grupper, där lagen i varje grupp innehåller samma spelare, men skiljer sig åt genom ordningen mellan spelarna. Antalet lag i varje grupp är lika med antalet sätt att permutera 11 spelare, dvs. 11!. Antalet olika lag är därför

$$\frac{16!}{5! \cdot 11!} = 4368.$$

Att välja ut k element bland n givna brukar kallas att välja en *kombination* bestående av k element. Exakt samma resonemang som i exemplet ovan leder till följande sats.

Sats 1.3 *Antalet möjliga kombinationer av k element ur n givna är*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dessa tal brukar kallas för *binomialkoefficienter* och betecknas med $\binom{n}{k}$, dvs. vi har

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}. \tag{1.18}$$

Vi har t.ex.

$$\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}, \quad \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\binom{10}{9} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}, \quad \binom{10}{1} = \frac{10}{1} = 10.$$

Uttrycket $\binom{n}{k}$ utläses "n över k". Notera att i formeln för $\binom{n}{k}$ har täljaren och nämnaren samma antal faktorer, nämligen (efter förkortning) k st. Det visar sig också ändamålsenligt att definiera $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Binomialkoefficienterna uppfyller bl-a. följande två samband:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \tag{1.19}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.20}$$

Dessa två samband kan man visa med hjälp av Sats 1.3, formel (1.18), men det är mer instruktivt att tillämpa ett kombinatoriskt resonemang. Att (1.20) gäller inser man av att operationen att ta bort k element ur mängden och därigenom bilda en mängd bestående av k element lika gärna kan uppfattas som ett sätt att bilda en mängd bestående av de återstående $n-k$ elementen. Antal möjliga kombinationer bestående av k element är därför lika många som antalet möjliga kombinationer med $n-k$ element.

Högerledet i (1.19) anger antalet möjliga kombinationer av $k+1$ element av $n+1$ element. Antag nu att vi särbehandlar ett visst fixt element av dessa $n+1$ stycken och kallar det för α. De olika kombinationerna av de $n+1$ elementen kan nu delas upp i två grupper; de som innehåller elementet α och de som inte gör det. Den första gruppen består av $k+1$ element valda bland n stycken (de ursprungliga $n+1$ exklusive α). Antal element i gruppen är alltså $\binom{n}{k+1}$. Den andra gruppen består av α samt k st andra element valda bland de n (de ursprungliga $n+1$ exklusive α).

Antalet element i gruppen är därför lika med antal kombinationer av k element ur n st., dvs. $\binom{n}{k}$. Detta ger (1.19).

Dessa samband förklarar varför man kan skriva upp binomialkoefficienterna i form av ett schema som kallas *Pascals triangel*. Det första sambandet svarar mot att varje tal inne i triangeln erhålls som summan av de två tal som står närmast ovanför. Det andra sambandet svarar mot att Pascals triangel är symmetrisk.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&& \\
&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&& \\
&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&& \\
&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&& \\
&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} && \\
& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6} \\
&&&&&& \cdots &&&&&& \\
&&&&&& \cdots &&&&&& \\
&&&&&&&& \binom{n}{k} && \binom{n}{k+1} && \\
&&&&&&&&& \binom{n+1}{k+1} &&&
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
&&&&&&& 1 && 1 &&&&&&& \\
&&&&&& 1 && 2 && 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 &&& \\
&& 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 && \\
& 1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 & \\
1 && 8 && 28 && 56 && 70 && 56 && 28 && 8 && 1 \\
&& \cdots &&&&&& . &&&&&& \cdots &&
\end{array}
$$

För att räkna ut binomialkoefficienterna är det ofta enklast att använda Pascals triangel. (Den återfinns i vanliga tabeller och handböcker som t.ex. i Råde-Westergren: BETA (Studentlitteratur), men är ju lätt att snabbt skriva ner.)

1.12 Binomialsatsen

En produkt upphöjd till ett positivt heltal n är lätt att räkna ut. För en summa blir det mer komplicerat. Vi har

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \text{ för alla } a, b \in R,$$

men, som bekant, är $(a+b)^n$ inte lika med $a^n + b^n$. Om vi utvecklar parenteserna genom vanlig hopmultiplikation så får vi

$(a+b)^1 = a+b,$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Koefficienterna i dessa utvecklingar är just de binomialkoefficienter (som kallas så eftersom eftersom de dyker upp i samband med binomet $a+b$) som vi ovan betecknade med $\binom{n}{k}$. Enligt den s.k. binomialsatsen gäller nämligen allmänt att koefficienten för $a^{n-k}b^k$ i utvecklingen av $(a+b)^n$ ges av $\binom{n}{k}$.

Sats 1.4 (Binomialsatsen) *För godtyckliga tal a och b och för alla heltal $n > 0$ gäller*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

eller, skrivet med summatecken,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k. \tag{21}$$

Bevis: Det gäller att multiplicera ihop n stycken lika parenteser

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)\ldots(a+b)(a+b). \tag{22}$$

Från varje parentes skall vi antingen ta ett a eller ett b och får då ett antal termer av typ

$$\underbrace{aab\ldots b\ldots ab}_{n \text{ stycken faktorer}}.$$

Man samlar ihop termerna, skriver om dem på potensform och frågar sig: Hur många av termerna innehåller precis k stycken faktorer b? Dvs. hur många termer av typen $a^{n-k}b^k$ finns det? (Här gäller naturligtvis $0 \le k \le n$.)

För att få denna typ av term skall vi ur de n parenteserna i (1.22) välja ut k stycken, från vilka b skall tas. Men detta kan enligt Sats 1.3 ske på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Alltså blir $\binom{n}{k} \cdot a^{n-k}b^k$ summan av alla de termer som innehåller precis k stycken faktorer b. Saken är därmed klar.

Exempel 1.42

$$(a+b)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} a^{8-k}b^k =$$
$$= \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 +$$
$$+ \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8 =$$
$$= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Exempel 1.43 Bestäm koefficienten för x^{16} i binomialutvecklingen av $(x+2)^{19}$.

Lösning: Vi har

$$(x+2)^{19} = \sum_{k=0}^{19} \binom{19}{k} x^{19-k} 2^k.$$

Men $19 - k = 16 \Leftrightarrow k = 3$. Alltså blir koefficienten för x^{16} lika med

$$\binom{19}{3} \cdot 2^3 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 = 7752.$$

Exempel 1.44 Bestäm koefficienten för $\frac{1}{x^{52}}$ i binomialutvecklingen av

$$(2x - \frac{1}{x})^{58}.$$

Lösning: Eftersom vi i detta fall har ett minustecken innanför parentesen, måste vi först göra en omskrivning:

$$\begin{aligned}(2x - \frac{1}{x})^{58} &= (2x + (-\frac{1}{x}))^{58} = \\ &= \sum_{k=0}^{58} \binom{58}{k} (2x)^{58-k} (-\frac{1}{x})^k = \sum_{k=0}^{58} \binom{58}{k} \cdot 2^{58-k} \cdot (-1)^k x^{58-2k}.\end{aligned}$$

Vi får en term innehållande x^{-52} om och endast om $58 - 2k = -52$, dvs. $k = 55$, så att den sökta koefficienten blir

$$\binom{58}{55} \cdot 2^{58-55} \cdot (-1)^{55} = \binom{58}{3} \cdot 2^3 \cdot (-1) = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8(-1) = -246848.$$

Vi avslutar detta avsnitt med att skriva binomialutvecklingen på ytterligare ett sätt:

$$\begin{aligned}&(a+b)^n = \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \ldots \qquad (23) \\ &\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

1.13 Numeriska beräkningar

För att bestämma perioden T hos en pendel finns den s.k. pendelformeln

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

där l är pendelns längd och där g är tyngdkraftsaccelerationen.

Formeln gäller för en punktformig kula upphängd i ett stelt snöre utan massa. Vidare måste man anta att utslagsvinklarna är små och att det inte finns någon friktion i upphängningen. Formeln gäller alltså för en idealiserad situation, för en s.k. matematisk pendel. Men trots att sådana pendlar inte finns i verkligheten så är formeln användbar i praktiken. Detta beror på att det inte är möjligt - eller ens alltid önskvärt - att räkna exakt i alla situationer. Man måste tillåta *fel*, men det är viktigt att man i största möjliga utsträckning har kontroll över felen. Vi bortser då från osystematiserbara fel som tankefel, skrivfel och rena räknefel som har med den person som sköter arbetet att göra. Felkällorna kan sammanfattas under tre huvudrubriker:

1. *Den matematiska modellen motsvarar inte exakt den observerade situationen.* (T.ex. snöre utan massa, punktformig kula, ingen friktion.)

2. *Osäkerhet i empiriska data.* (T.ex. pendellängden, tyngdkraftaccelerationen.)

3. *Fel som uppstår under uträkning.* (T.ex. att π måste anges med ändligt antal siffror och att kvadratrötter i allmänhet inte kan beräknas exakt.)

I detta avsnitt ska vi ge en introduktion till fel av den tredje typen, medan behandlingen av fel av de två första slagen överlämnas till andra ämnens företrädare. Rent uträkningstekniskt finns det inget att göra åt dessa fel. I kapitel 3 återkommer vi dock till frågan om hur mycket fel av den andra typen kan påverka resultatet. Denna fråga berörs också på sid. 45.

Exempel 1.45 Antag att vi vet att de exakta värdena av sidlängderna av en rektangulär plexiglasskiva är α och β. Mätning med ett skjutmått gav vid ett tillfälle måtten (i cm) $a_1 = 3.76$ respektive $b_1 = 5.12$ medan en enklare metod (ögonmått) gav $a_2 = 4$ respektive $b_2 = 5$. Ingen av metoderna kan förstås ge de exakta

värdena α och β, men man uppskattade de båda metodernas noggrannhet och fick olikheterna

$$3.74 \leq \alpha \leq 3.78, \quad 5.09 \leq \beta \leq 5.15,$$
$$3 \leq \alpha \leq 4, \quad 4 \leq \beta \leq 6.$$

Om vi för ett ögonblick låtsas att a_1, b_1, a_2 och b_2 är exakta värden så kan vi räkna ut skivans area och får (i cm^2)

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 b_1 = 19.2512, \\ A_2 &= a_2 b_2 = 20. \end{aligned}$$

Emellertid gäller att det exakta värdet A av arean ges av $A = \alpha\beta$. Två frågor uppstår nu:

1. Hur nära A ligger A_1 respektive A_2?
2. Hur många decimaler är det rimligt att ta med i A_1?

I detta avsnitt kommer frågor av detta slag att diskuteras.

Låt $\widetilde{a}$ (läs a-tilde) vara ett närmevärde till en storhet med det exakta värdet a. Differensen

$$\varepsilon_a = \widetilde{a} - a \qquad (24)$$

kallas *absolutfelet.* Det gäller alltså $\widetilde{a} = a + \varepsilon_a$, dvs.

$$närmevärdet = exakta\, värdet + felet$$

Exempel 1.46 Bestäm felet då 0.3 används som närmevärde för $\frac{1}{3}$.

Lösning: I detta fall kan vi göra en exakt beräkning. Felet $= 0.3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}$.

Om både $\widetilde{a}$ och a är kända så känner man också felet ε_a, men normalt är det ju inte på detta sätt. Vanligtvis känner man bara en *felgräns,* dvs. man vet att ε_a uppfyller en olikhet av typen

$$|\varepsilon_a| \leq \delta_a.$$

Generellt gäller att då ingen tvekan råder beträffande vilken storhet som avses så kan namnet på storheten utelämnas. Vi skriver alltså i så fall istället

$$|\varepsilon| \leq \delta. \qquad (25)$$

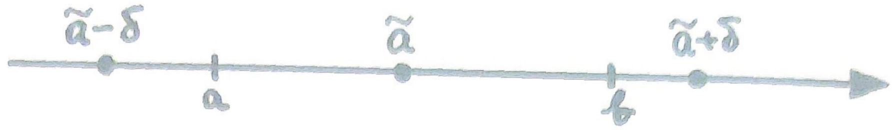
Olikheten (1.25) kombinerad med (1.24) ger, eftersom $|\widetilde{a} - a| = |a - \widetilde{a}|$,

$$|a - \widetilde{a}| \leq \delta \text{ eller } -\delta \leq a - \widetilde{a} \leq \delta \text{ dvs. } \widetilde{a} - \delta \leq a \leq \widetilde{a} + \delta.$$

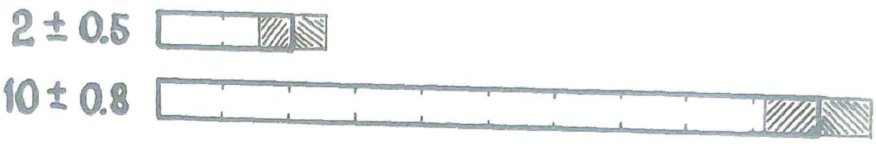
I stället för detta skriver man ofta

$$a = \widetilde{a} \pm \delta.$$

Detta är egentligen en svårt missbruk av likhetstecknet, men samtidigt ett praktiskt och allmänt vedertaget skrivsätt. Man får naturligtvis inte förväxla detta med skrivsättet $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ vid lösning av andragradsekvationer. Observera också att om vi har $a = \widetilde{a} \pm \delta$ och $b = \widetilde{a} \pm \delta$ så följer inte av detta att $a = b$.



Exempel 1.47 Vad menas med att ett närmevärde har större noggrannhet än ett annat? Om $a = 2 \pm 0.5$ och $b = 10 \pm 0.8$ så är felgränsen i det senare fallet störst. Å andra sidan utgör felgränsen 0.5 en fjärdedel av närmevärdet 2 medan felgränsen 0.8 utgör 8 hundradelar av 10. Vi har $\left|\frac{a-2}{\widetilde{a}}\right| \leq 0.25$ och $\left|\frac{b-10}{\widetilde{b}}\right| \leq 0.08$.



Detta visar att det finns anledning betrakta relativa fel.

Definition 1.4 Låt $\widetilde{a}$ vara ett närmevärde till a. Då har vi

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \widetilde{a} - a && \text{absolutfelet,} \\ |\varepsilon_a| &\leq \delta_a && \text{absolutfelets gräns,} \\ r_a &= \frac{\varepsilon_a}{a} && \text{relativfelet.} \end{aligned}$$

Definitionen av relativfel innehåller a som ju i allmänhet är okänt. I praktiken ersätter man därför a med $\widetilde{a}$ och får

$$\text{relativfelet} \approx \frac{\varepsilon_a}{\widetilde{a}}. \tag{26}$$

Exempel 1.48 Antag att $a = 2.015 \pm 0.00005$. Beräkna relativfelets gräns.

Lösning: Vi har $\widetilde{a} = 2.015$ och $\delta_a = 0.0005$. Detta ger

$$\left|\frac{\varepsilon_a}{a}\right| \approx \left|\frac{\varepsilon_a}{\widetilde{a}}\right| = \frac{|\varepsilon_a|}{2.015} \lesssim \frac{\delta_a}{2.015} \approx 0.00024814.$$

Tecknet $\lesssim$ kan utläsas "approximativt mindre än".

Om vi skall ange en felgräns bör vi inte ta med mer än två siffror (nollor i början och slutet oräknade). Relativgränser ges vidare ofta som procent eller promilletal. Svaret i detta exempel kan lämpligen anges som 0.25 $^\circ/_{\circ\circ}$ eller 0.3 $^\circ/_{\circ\circ}$.

För att på ett enkelt sätt ge en uppfattning om det absoluta respektive relativa felet används begreppen *korrekta decimaler* respektive *signifikanta siffror*.

Definition 1.5 Närmevärdet $\widetilde{a}$ till a sägs ha n st. korrekta decimaler, $n \geq 0$, om $|\varepsilon_a| \leq 0.5 \cdot 10^{-n}$.

Exempel 1.49 Närmevärdet i

$a = 0.073 \pm 0.0005$	har	3 korrekta decimaler,
$b = 0.073 \pm 0.0006$	har	2 korrekta decimaler,
$c = 0.073 \pm 0.0004$	har	3 korrekta decimaler,
$d = 1.7 \pm 0.1$	har	0 korrekta decimaler,
$x = 1.73 \pm 0.05$	har	1 korrekt decimal.

I många sammanhang är *flyttal* användbara. Det innebär att vi använder en taldel och en exponentdel för att beskriva talet.

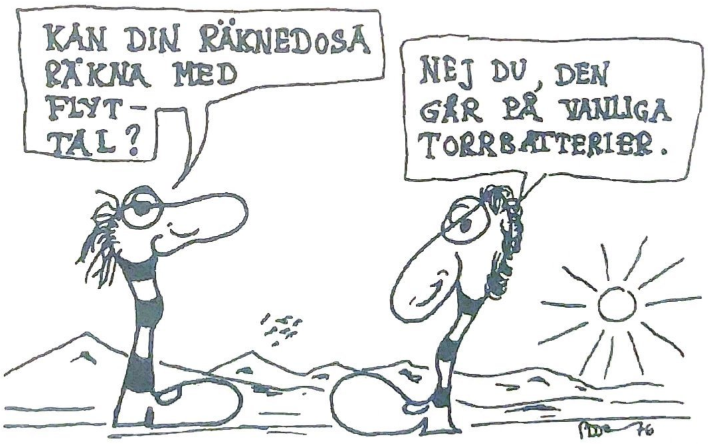
Exempel 1.50 570000000 kan skrivas $0.57 \cdot 10^9$ och 0.0000057 som $0.57 \cdot 10^{-5}$.

Om man gjort en längre beräkning på dator och inte riktigt vet storleksordningen på de tal som skall skrivas ut är det lämpligt att presentera resultatet i form av flyttal. Datorer använder internt f.ö. flyttal med basen 2.

Låt oss använda flyttal i följande form:

$$a = t \cdot 10^m, \; 0.1 \leq t < 1, \; m \text{ heltal.}$$

Talet t kallas *taldel* och m *exponentdel.* Det finns exakt ett sätt att skriva ett godtyckligt tal $a \neq 0$ på detta sätt.



Definition 1.6 Antag att närmevärdet $\tilde{a} = \tilde{t} \cdot 10^m$ skrivits som flyttal, $0.1 \leq \tilde{t} < 1$. Om taldelen $\tilde{t}$ har n korrekta decimaler så säger vi att $\tilde{a}$ har n st. *signifikanta siffror.*

Om $\tilde{a}$ har en felgräns så måste vi förse den med samma exponentdel som $\tilde{a}$ enligt följande exempel.

Exempel 1.51

$\tilde{a} \pm \delta_a$	Korr. decimaler	Flyttal	Signifikanta siffror
0.030 ± 0.0005	3	$(0.30 \pm 0.005) \cdot 10^{-1}$	2
0.006 ± 0.0004	3	$(0.6 \pm 0.04) \cdot 10^{-2}$	1
22.7 ± 0.05	1	$(0.227 \pm 0.0005) \cdot 10^{2}$	3
0.022 ± 0.0005	3	$(0.22 \pm 0.005) \cdot 10^{-1}$	2
0.22 ± 0.005	2	$(0.22 \pm 0.005) \cdot 10^{0}$	2
2.2 ± 0.05	1	$(0.22 \pm 0.005) \cdot 10^{1}$	2

Alla de tre sista talen i exemplet har 2 signifikanta siffror, men också samma gräns för det relativa felet, nämligen 5/220. På samma sätt som antalet korrekta decimaler ger upplysning om det absoluta felet ger antalet signifikanta siffror upplysning om det relativa. Man inser att om antalet signifikanta siffror är n så är beloppet av det relativa felet högst $5 \cdot 10^{-n}$.

Låt oss nu titta på ett par multiplikationer:

$$\begin{aligned} 1.001 \cdot 1.5 &= 1.5015 \\ 1.0001 \cdot 1.5015 &= 1.50165015 \end{aligned}$$

Antalet decimaler i produkten blir summan av antalet decimaler i faktorerna. Om vi kvadrerar den sista produkten så får vi 16 decimaler i talet. Då, om inte förr, blir vi säkert intresserade av att korta av talet. Vi gör det genom avrundning enligt följande huvudregel:

Om ett tal med fler än n decimaler skall avrundas till n decimaler väljer vi det tal som ligger närmast.

Om vi vill avrunda 0.15 till en decimal så behövs en extraregel, eftersom 0.1 och 0.2 är lika starka kandidater enligt huvudregeln. Vi väljer då att avrunda så att sista siffran i det avrundade talet blir jämn.

Exempel 1.52 Avrundning till n decimaler.

Tal a	n	Avrundat tal $\tilde{a}$	Avrundningsfel $\tilde{a} - a$
1.6329	2	1.63	$-0.29 \cdot 10^{-2}$
1.635	2	1.64	$0.5 \cdot 10^{-2}$
−1.75	1	−1.8	$-0.5 \cdot 10^{-1}$
−1.376849	5	−1.37685	$-0.1 \cdot 10^{-5}$
−1.376849	4	−1.3768	$0.49 \cdot 10^{-4}$
2.7	0	3	$0.3 \cdot 10^{0}$

Felet är till beloppet högst en halv enhet i den sist medtagna decimalen:

Låt $\tilde{a}$ vara det tal vi får om vi avrundar talet a till n decimaler. Vid korrekt avrundning är beloppet av avrundningsfelet högst $0.5 \cdot 10^{-n}$.

Vi skall nu titta närmare på vad som händer då man använder de fyra räknesätten på närmevärden. Vi börjar med addition av $\tilde{a}$ och $\tilde{b}$.

$$\tilde{a} + \tilde{b} = (a + \varepsilon_a) + (b + \varepsilon_b) = (a + b) + (\varepsilon_a + \varepsilon_b).$$

Vi betecknar felet i summan med ε_{a+b} och får:

$$\varepsilon_{a+b} = \left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) - (a + b) = \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

Triangelolikheten ger

$$|\varepsilon_{a+b}| = |\varepsilon_a + \varepsilon_b| \leq |\varepsilon_a| + |\varepsilon_b| \leq \delta_a + \delta_b.$$

Vid subtraktion får vi på liknande sätt $|\varepsilon_{a-b}| = |\varepsilon_a - \varepsilon_b| \leq |\varepsilon_a| + |\varepsilon_b| \leq \delta_a + \delta_b$ och har därmed visat följande sats:

Sats 1.5 *Vid addition och subtraktion skall felgränserna adderas, dvs.*

$$\begin{aligned} \delta_{a+b} &= \delta_a + \delta_b, \\ \delta_{a-b} &= \delta_a + \delta_b. \end{aligned}$$

Exempel 1.53 Om $a = 1.7 \pm 0.05$ och $b = 1.6 \pm 0.05$ så är $a + b = 3.3 \pm 0.1$ och $a - b = 0.1 \pm 0.1$.

Vid multiplikation av $\tilde{a}$ och $\tilde{b}$ får vi

$$\begin{aligned} \tilde{a}\tilde{b} &= (a + \varepsilon_a)(b + \varepsilon_b) = ab + b\varepsilon_a + a\varepsilon_b + \varepsilon_a\varepsilon_b, \\ \varepsilon_{ab} &= \tilde{a}\tilde{b} - ab = b\varepsilon_a + a\varepsilon_b + \varepsilon_a\varepsilon_b. \end{aligned}$$

Vi dividerar med ab och försummar den sista termen, som normalt är liten i förhållande till de övriga, och får

$$\frac{\varepsilon_{ab}}{ab} \approx \frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{\varepsilon_b}{b}.$$

För att komma över till felgränser behövs återigen triangelolikheten:

$$\left|\frac{\varepsilon_{ab}}{ab}\right| \approx \left|\frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{\varepsilon_b}{b}\right| \leq \left|\frac{\varepsilon_a}{a}\right| + \left|\frac{\varepsilon_b}{b}\right| \leq \frac{\delta_a}{|a|} + \frac{\delta_b}{|b|}.$$

Högerledet är alltså en gräns för det relativa felet vid multiplikation. Med litet mer arbete kan vi få en liknande regel för division och vi kan således formulera följande sats.

Sats 1.6 *Vid multiplikation och division skall de relativa felgränserna adderas, dvs.*

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{ab}}{|ab|} &= \frac{\delta_a}{|a|} + \frac{\delta_b}{|b|}, \\ \frac{\delta_{a/b}}{|a/b|} &= \frac{\delta_a}{|a|} + \frac{\delta_b}{|b|}. \end{aligned}$$

I praktiken måste a och b i högerledet ersättas av $\tilde{a}$ och $\tilde{b}$.

Exempel 1.54 Vi har $a = -2.0 \pm 0.05$ och $b = 10 \pm 0.5$. Hur stort kan det absoluta felet bli i närmevärdena till produkten ab och kvoten a/b?

Lösning: Vi har $ab \approx \widetilde{ab} = -20$ och $a/b \approx \widetilde{a/b} = -0.2$. Vi beräknar först den approximativa gränsen för relativfelet, som enligt Sats 1.6 är

$$\frac{0.05}{2.0} + \frac{0.5}{10} = 0.075.$$

Detta ger $\delta_{ab} \approx \left|\widetilde{ab}\right| \cdot 0.075 = 1.5$ och $\delta_{a/b} \approx \left|\widetilde{a/b}\right| \cdot 0.075 = 0.015$. Svaret på uppgiften blir således $ab = -20 \pm 1.5$ och $a/b = -0.2 \pm 0.015$.

Det är ofta praktiskt att utnyttja sambandet mellan relativfel och antalet signifikanta siffror när det gäller att göra noggrannhetsbedömningar vid multiplikation och division.

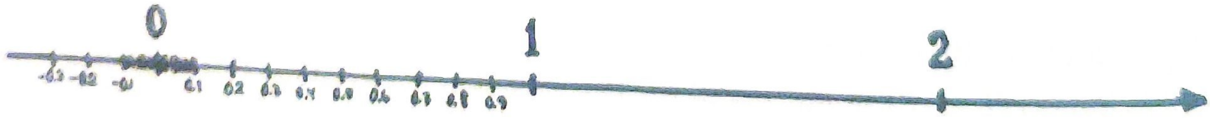
Exempel 1.55 Vi skall beräkna $c = d/\pi$ för hand. Vi har d-värdet med 3 signifikanta siffror och tänker använda ett π-värde med 10 decimaler "för säkerhets skull". Är detta rimligt?

Lösning: Tar vi $\pi \approx 3.1416$ så får vi 5 signifikanta siffror i nämnaren. Nämnarens relativa felgräns blir då någon hundradel av täljarens och kan försummas. Det räcker alltså gott med fyra decimaler i värdet på π.

Exempel 1.55 är ett specialfall av följande problem: *Hur många siffror bör man ha med vid numeriska beräkningar?*

Först kan vi konstatera att datorer, genom att de arbetar med flyttal, har ett fixt antal signifikanta siffror. En följd av detta blir att talen ligger "tätare" kring 0. För att illustrera detta kan vi tänka oss extremfallet att vi bara har en siffras noggrannhet.

Exempel 1.56 Om vi räknar med 10 siffrors noggrannhet så har talet $1234567893 = 0.1234567893 \cdot 10^{10}$ som närmaste högre tal $1234567894 = 0.1234567894 \cdot 10^{10}$, dvs. avståndet är 1. Däremot har talet 0.1234567893 som granne 0.1234567894, dvs. ett avstånd på 10^{-10}.



Som illustration till att räkning med närmevärden är lite "eljest" (som det heter i Luleå med omnejd) kan nämnas att "vanliga räknelagar" inte behöver gälla.

Exempel 1.57 Antag att vi räknar med 3 decimaler. Då är

$$\begin{aligned}(0.010 \cdot 0.020) \cdot 30 &= 0.000 \cdot 30 = 0,\\ 0.010 \cdot (0.020 \cdot 30) &= 0.010 \cdot 0.6 = 0.006.\end{aligned}$$

Om vi räknar med två siffrors noggrannhet gäller .t.ex.

$$\begin{aligned}(0.045 + 0.14) + 1.4 &= 0.18 + 1.4 = 1.6,\\ 0.045 + (0.14 + 1.4) &= 0.045 + 1.5 = 1.5.\end{aligned}$$

Om man räknar med närmevärden kan det alltså spela roll i vilken ordning operationer med lika prioritet utförs. Det finns en tumregel som säger att en summa av positiva flyttal skall beräknas så att de minsta termerna summeras först.

Vi avslutar detta avsnitt med att peka på möjligheten att göra *numeriska experiment* för att få ett visst grepp om de fel som finns i ett resultat. Då man använder dator är det i många fall enkelt att göra om beräkningen med fler siffrors noggrannhet. Den skillnad man får i resultatet kan avslöja hur stor roll avrundningsfelen i mellanresultaten har spelat.

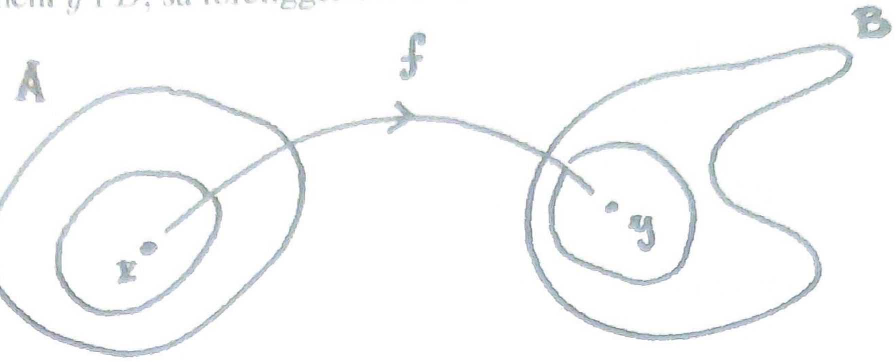
Om man vill skaffa sig en uppfattning om hur känsligt resultatet av beräkningen är för fel i indata kan man göra s.k. *experimentell störningsräkning*. Man tar helt enkelt och varierar indata något, eventuellt slumpmässigt, och observerar hur stor ändring det blir i resultatet.

Exempel 1.58 Låt oss återvända till plexiglasskivan i exempel 1.45. Experimentell störningsräkning innebär i detta enkla fall att vi stoppar in ytterlighetsvärdena för α och β. Det ger för skjutmåttet $3.74 \cdot 5.09 \leq \alpha\beta \leq 3.78 \cdot 5.15$, dvs. $19.0366 \leq A \leq 19.4670$. Detta bör skrivas $A = 19.25 \pm 0.22$. För ögonmåttet får vi $12 = 3 \cdot 4 \leq \alpha\beta \leq 5 \cdot 6 = 30$ som bör skrivas $A = 21 \pm 9$.

1.14 Funktioner

Det moderna funktionsbegreppet har växt fram stegvis. På 1830-talet insåg bl.a. Dirichlet att de då existerande definitionerna av begreppet *funktion* inte var tillfredsställande. Dittills hade en funktion sagts vara ett *"matematiskt uttryck"*. Dirichlet undvek denna vaga fras genom att säga att y är en funktion av x om det till varje x i ett givet intervall svarar ett entydigt bestämt värde på y. Han poängterade att det inte är av betydelse om beroendet av x, i hela intervallet, kan beskrivas av en eller flera lagar och att beroendet mycket väl kan få vara beskrivet på annat sätt än genom matematiska operationer.

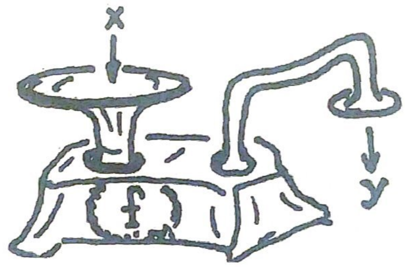
Dirichlets definition stämmer rätt väl med den idag allmänt accepterade. Ibland uttrycks definitionen på följande sätt: *En funktion är en mängd av ordnade par, sådan att två olika par inte kan ha samma förstakomponent.* I denna bok kommer vi inte att ha nytta av en så allmänt hållen och abstrakt definition, men vi kan inte heller acceptera Dirichlets inskränkning *".......i ett givet intervall....."*. Vi måste kunna tänka oss funktioner definierade på vilken sorts mängd som helst. Däremot är det, för våra syften, inte så viktigt att fundera över vad en funktion egentligen *är*. Det väsentliga är att om det till varje element x i en delmängd av A svarar ett entydigt bestämt element y i B, så föreligger det en funktion f från A till B.



Delmängden till A kallas funktionens *definitionsmängd* och den delmängd av B som innehåller alla tänkbara y kallas funktionens *värdemängd.* Vi använder beteckningarna D_f för definitionsmängden och V_f för värdemängden till funktionen f. Om vi betecknar funktionen med någon annan bokstav, t.ex. g, F eller y så blir naturligtvis beteckningarna för definitions- och värdemängderna D_g, D_F, D_y, V_g, V_F, respektive V_y.

Enligt vårt synsätt skulle egentligen uttryck som *"Trycket är en funktion av ....",* *"Kraften är en funktion av ...", ".......som är en funktion av både tiden och läge ..."* vara meningslösa och kanske t.o.m. farliga. Det visar sig emellertid i praktiken inte vara något större problem att använda ordet funktion i flera olika betydelser. I fraserna ovan svarar det närmast mot *"beror av".*

Man kan uppfatta en funktion som ett slags "maskin" där man kan stoppa in ett x från definitionsmängden och få ut exakt ett motsvarande y från värdemängden.

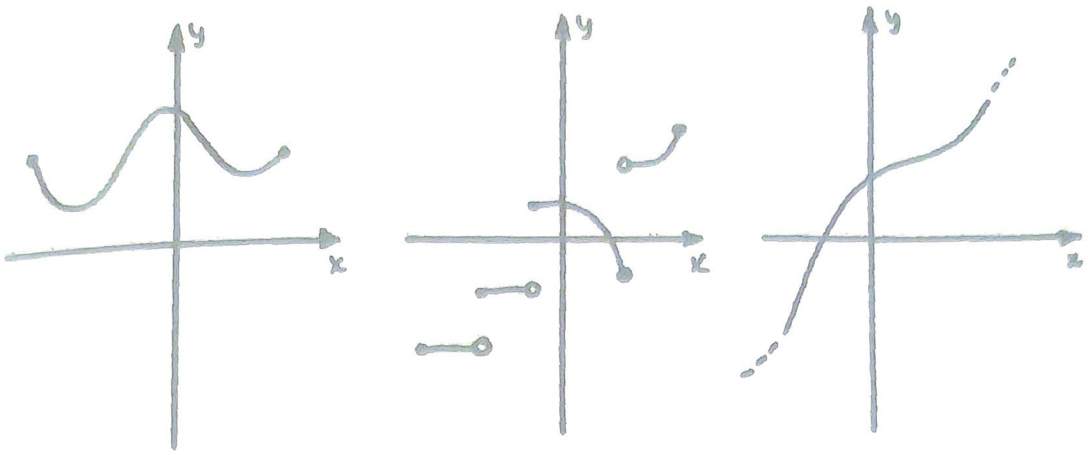


I text vill man ofta ange att x och y är förknippade med varandra genom funktionen f. Då skriver man vanligen $y = f(x)$. Detta utläses "y är lika med f (av) x".

Man tillämpar i många sammanhang ett geometriskt synsätt, som anknyter till figuren med "bubblorna" ovan och säger att x *avbildas på* y. Detta synsätt har lett till följande alternativa skrivsätt:

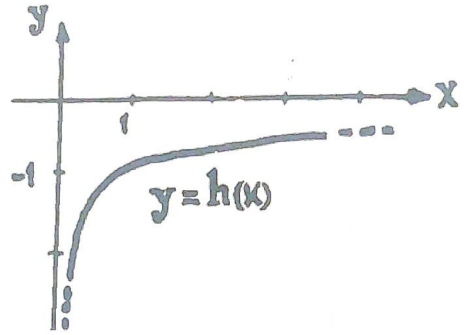
$x \curvearrowright y$	x avbildas på y (eller bara "x på y"),
$f : x \curvearrowright y$	f avbildar x på y,
$x \overset{f}{\curvearrowright} y$	x avbildas av f på y.

Då x och y är tal kan man illustrera funktioner i ett koordinatsystem med hjälp av en funktionskurva eller *graf*.

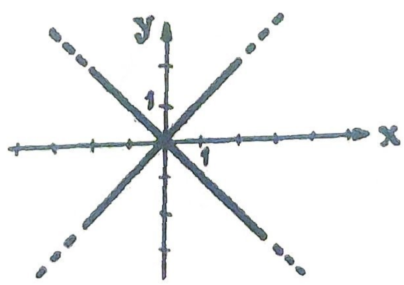


En linje parallell med andraaxeln (y-axeln) kan skära en funktionskurva i högst en punkt. Skulle det finnas fler skärningspunkter så är det ingen funktionskurva; varje x i definitionsmängden skall ju svara mot exakt ett y.

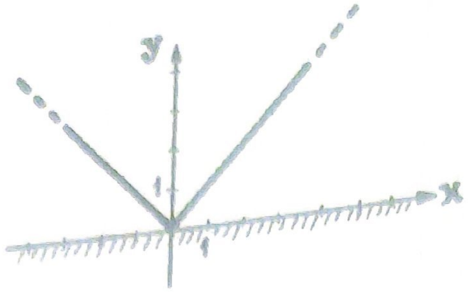
Exempel 1.59 Sätt $A = B = R$ och definiera funktionen h genom $h(x) = -1/\sqrt{x}$. Vi får då $D_h = R_+$ och $V_h = R_-$.

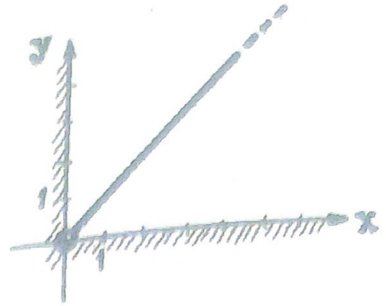


Exempel 1.60 Mellan x och y råder sambandet $x^2 = y^2$. Detta samband definierar inte en funktion $x \curvearrowright y$ från R till R. Vi kräver ju i funktionsdefinitionen att till varje x skall höra *ett enda* y. Här får vi exempelvis för $x = 2$ de motsvarande värdena $y = 2$ och $y = -2$.



Exempel 1.61 Sambandet i föregående exempel definierar en funktion $x \curvearrowright y$ från R till $\{y : y \geq 0\}$, ty nu svarar mot varje värde på x ett *entydigt* bestämt värde på y. Likså definierar sambandet i exempel 1.60 en funktion $x \curvearrowright y$ från R_+ till R_+.





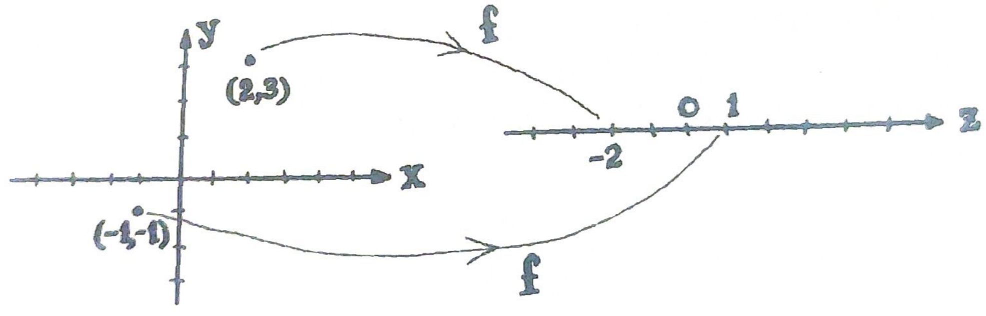
Vi ser att inte enbart sambandet mellan x och y utan även de mängder man utgår ifrån är väsentliga när man anger en funktion. Vanligtvis brukar man ange definitionsmängden, men ofta låter man bli detta och underförstår att definitionsmängden är så stor som möjligt. Exempel på detta är:

Funktion	Största möjliga definitionsmängd
$y = \sqrt{x-3}$	$x \geq 3$
$y = 1/x^2$	$x \neq 0$
$y = \dfrac{x}{1+x^2}$	hela R
$y = \sqrt[4]{2-x^2}$	$\|x\| \leq \sqrt{2}$

Exempel 1.62 Antag att $A = R^2 = \{(x,y) : x \in R \text{ och } y \in R\}$ och $B = R$. Definiera f genom

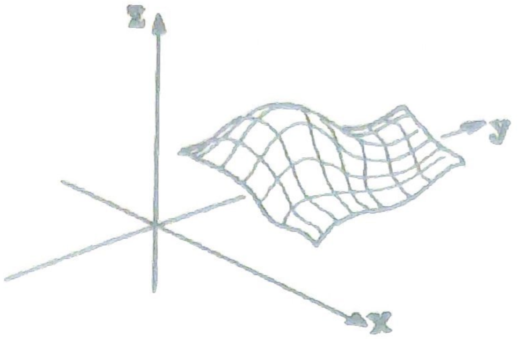
$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy.$$

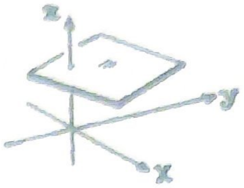
Då är f en funktion från hela R^2 till hela R.



Exempel 1.63 Sambandet $|z| = x^2y^2$ definierar inte någon funktion $(x,y) \curvearrowright z$, ty $(x,y) = (1,1)$ ger $z = 1$ eller $z = -1$.

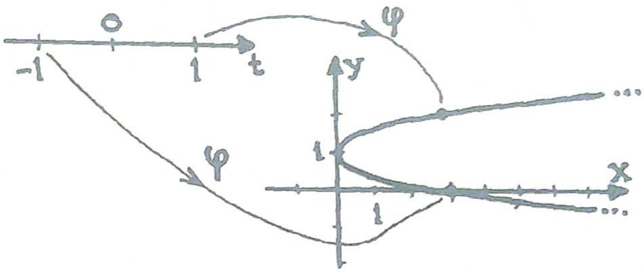
Funktioner från R^2 till R kan illustreras som funktionsytor i ett tredimensionellt koordinatsystem. Jämför t.ex. med ekvationen för ett plan i rymden som ju (ibland) definierar en funktion $(x,y) \curvearrowright z$ och vars geometriska bild är en (plan) funktionsyta.





Funktioner från R^2 till R brukar kallas *funktioner av två variabler.*

Exempel 1.64 Sätt $A = R$ och $B = R^2$ och definiera φ genom $\varphi : t \curvearrowright (x, y)$ där $x = 3t^2$ och $y = t + 1$. Vi får då exempelvis $\varphi(2) = (12, 3)$, $\varphi(1) = (3, 2)$ och $\varphi(-1) = (3, 0)$.



Här gäller $D_\varphi = R$ och $V_\varphi = \left\{ (x, y) \middle| x = 3(y-1)^2 \right\}$.

För en funktion f kallas ofta $f(x)$ *funktionsvärdet* i punkten x. Därav bl.a. namnet värdemängd. Frasen "funktionen $f(x)$" är egentligen ologisk. Emellertid uppstår inga missförstånd om man tillåter sig säga så. Det visar sig t.o.m. praktiskt att i vissa sammanhang blanda y och $f(x)$ och skriva $y(x)$, speciellt i samband med differentialekvationer.

1.15 Invers funktion

Om man försöker köra en "funktionsmaskin" baklänges på element ur V_f kan två saker inträffa. Antingen får man ut ett enda element som tillhör definitionsmängden eller också sprutar maskinen ut flera element. I det första fallet är funktionsmaskinen en funktionsmaskin även då den körs baklänges. En sådan funktionsmaskin sägs vara *omvändbar*. En funktion är alltså omvändbar om två olika element i D_f aldrig svarar mot ett och samma funktionsvärde i V_f. Med hjälp av implikationspilar kan vi formulera detta på följande sätt.

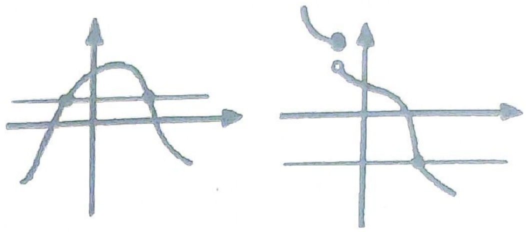
Definition 1.7 En funktion f är *omvändbar* om det för alla x_1 och $x_2 \in D_f$ gäller att

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \tag{27}$$

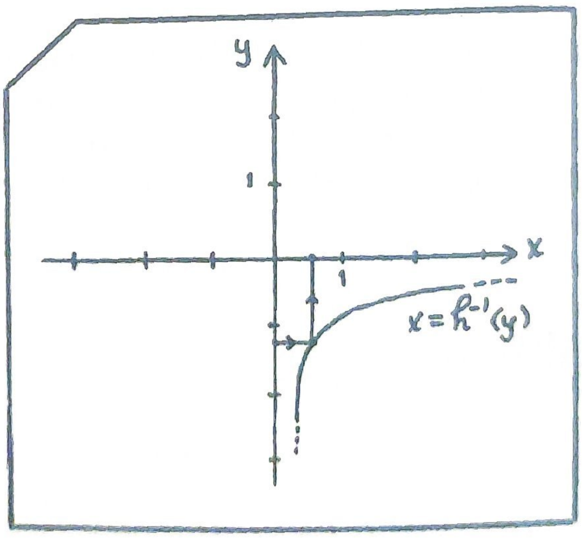
Vi noterar att (1.27) är ekvivalent med

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \tag{28}$$

Inte den första men väl den andra funktionen i exempel 1.61 är omvändbar. Lägg också märke till att (1.27) och (1.28) har en enkel geometrisk tolkning för funktioner från R till R; varje linje parallell med första-axeln (x-axeln) får skära funktionens graf i *högst en punkt*.

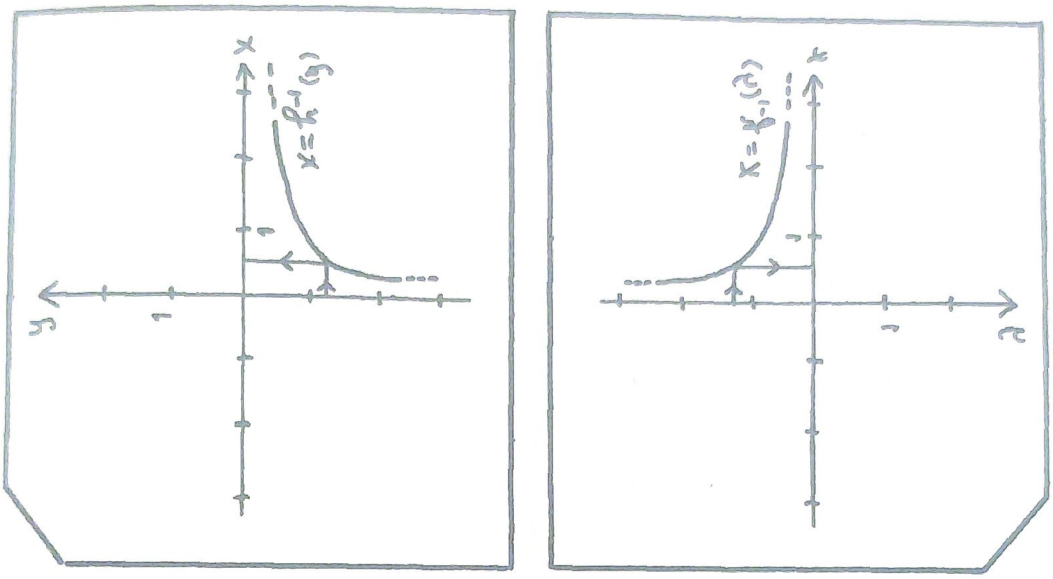


Låt oss nu titta närmare på den omvändbara funktionen h i exempel 1.59. I detta fall föreligger också en funktion $y \curvearrowright x$, som kallas för *inversen* av h. Man brukar använda beteckningen h^{-1} som utläses "h-invers". För att få det funktionsvärde $y = h(x)$ som svarar mot x startar vi på den horisontella förstaaxeln (x-axeln) och går, via kurvan $y = h(x)$ till den vertikala andraaxeln (y-axeln).

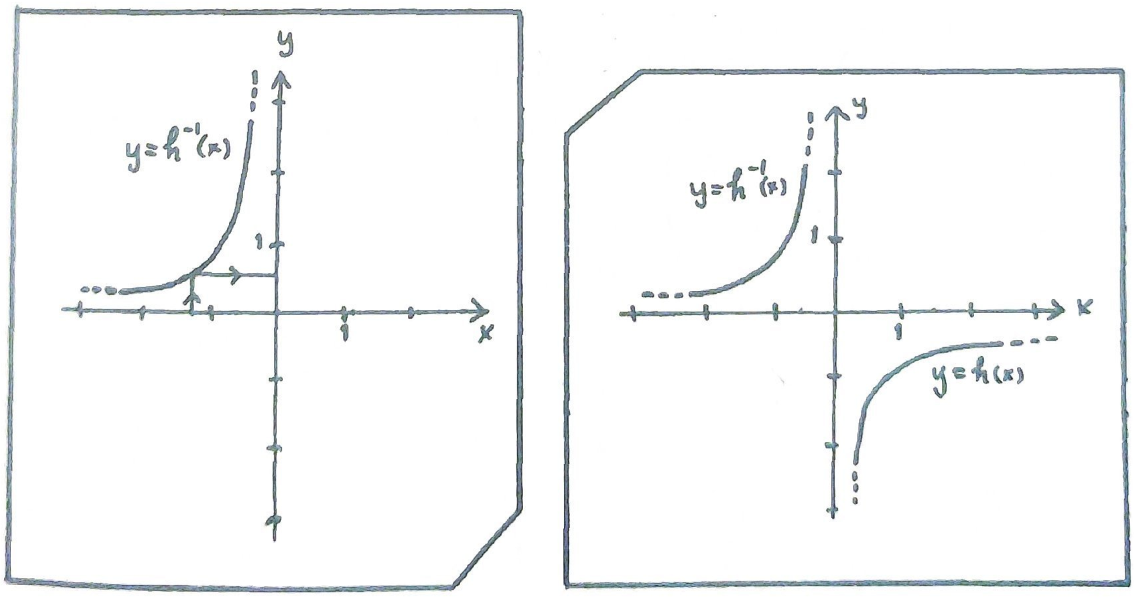


På grund av omvändbarheten kan vi också ta den vertikala axeln som förstaaxel, gå ut till kurvan, vika av och gå till den horisontella axeln, som då tjänar som andraaxel. På detta sätt ger vår figur också en bild av den inversa funktionen h^{-1}. Vi har både $y = h(x)$ och $x = h^{-1}(y)$. Dessa två samband uttrycker samma sak; de är ekvivalenta.

Nu vore det emellertid bra om vi kunde rita in kurvan $y = h^{-1}(x)$ i samma diagram. Vi vill rita inversens kurva med förstaaxeln pekande åt höger och med andraaxeln vertikal, riktad rakt uppåt. Då skulle vi lättare kunna jämföra h och h^{-1}. Vi kan göra så här:



I den vänstra bilden har vi vridit systemet för att få förstaaxeln horisontell. I den högra har vi speglat för att få förstaaxeln att peka åt "rätt" håll.



I den vänstra bilden har vi bytt beteckningar; x mot y och y mot x. I den högra har vi ritat in båda kurvorna i samma diagram.

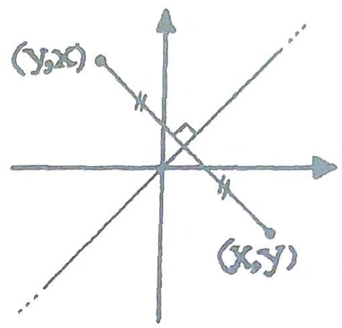
Vårt resonemang om kurvorna ger en idé om hur man ska kunna bestämma det uttryck som definierar inversen. Man startar från $y = h(x)$, dvs. t.ex. $y = -1/\sqrt{x}$. Så löser man ut x vilket ger $x = 1/y^2$, $y < 0$. Därefter är det bara att byta x mot y

och y mot x så att man får $y = 1/x^2$, $x < 0$, vilket är den sökta inversen h^{-1} till funktionen $h(x) = -1/\sqrt{x}$.

Exempel 1.65 Bestäm uttrycket för inversen till funktionen g definierad genom $g(x) = x^2 + 1$, $x \leq 0$.

Lösning: Vi sätter först $y = x^2 + 1$ och löser ut x som funktion av y. Detta ger $x = \pm\sqrt{y-1}$. Men eftersom vi har $x \leq 0$ så duger inte plustecknet och vi får $x = -\sqrt{y-1}$. Slutligen byter vi x mot y och y mot x och får $y = -\sqrt{x-1}$ dvs. $g^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$.

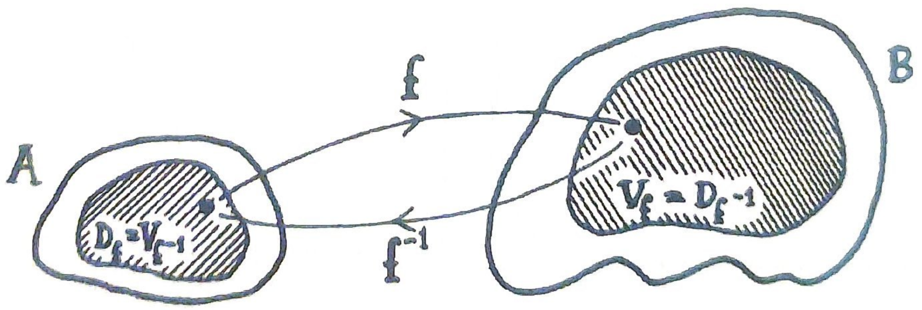
Kurvorna $y = h(x)$ och $y = h^{-1}(x)$ i den sista högra figuren ovan är varandras spegelbilder i linjen $y = x$, förutsatt att man använder samma skala på x- och y-axlarna. Detta är ingen tillfällighet. Bytet mellan x och y svarar mot en avbildning som avbildar varje punkt (x, y) på en punkt (y, x). Denna avbildning är just en spegling i linjen $y = x$.



Det resonemang som vi genomfört för funktionen h är generellt och gäller för varje omvändbar funktion. Vi sammanfattar det hela:

Antag att $f : x \curvearrowright y$ är en omvändbar funktion från A till B. Då har f en invers funktion $f^{-1} : y \curvearrowright x$ från B till A.

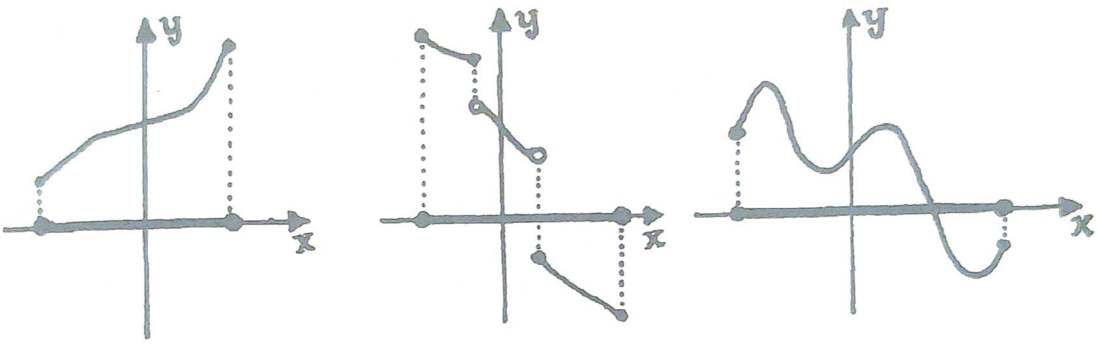
För alla $x \in D_f$ gäller $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ och för definitions- och värdemängderna gäller $D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$.



Vi kan också formulera följande sats:

Sats 1.7 *Om f är en omvändbar funktion från R till R och dess graf $y = f(x)$ har ritats in i ett ON-system så ger en spegling i linjen $y = x$ grafen $y = f^{-1}(x)$.*

En speciellt viktig klass av omvändbara funktioner från R till R utgörs av de *strängt monotona* funktionerna. I följande figurer illustreras en växande funktion, en avtagande och en som varken är växande eller avtagande.



Den formella definitionen kan formuleras på följande sätt:

Definition 1.8 Låt f vara en funktion från R till R och låt I vara ett intervall. Då sägs f vara
a) *strängt växande* på I om $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
b) *strängt avtagande* på I om $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
c) *strängt monoton* på I om f antingen är strängt växande eller strängt avtagande på hela I.

Följande två exempel syftar till att illustrera vår definition och inte till att ge en praktiskt användbar metod. I praktiken använder man istället oftast derivatans tecken för att undersöka växande och avtagande. Detta kommer att behandlas i kapitel 4.

Exempel 1.66 Funktionen f, definierad genom $f(x) = x - x^2$, är strängt monoton på $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, ty välj två godtyckliga tal x_1 och x_2 i I, $x_1 < x_2$. Då är

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1 - x_1^2 - \left(x_2 - x_2^2\right) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 1). \end{aligned}$$

Men båda de två parenteserna i det sista uttrycket är positiva och således gäller $f(x_1) > f(x_2)$, dvs. f är strängt avtagande.

Exempel 1.67 Visa att $f(x) = 1/(1+x^2)$ är strängt monoton på $[-2, -1]$.

Lösning: Välj $x_1 < x_2$ i det aktuella intervallet och studera $f(x_1) - f(x_2)$. Vi får

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{1+x_1^2} - \frac{1}{1+x_2^2} = \frac{x_2^2 + 1 - x_1^2 - 1}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}. \end{aligned}$$

Eftersom både x_1 och x_2 är negativa är $x_2 + x_1 < 0$. Vidare är, enligt antagandet, $x_2 - x_1 > 0$ medan de två parenteserna i nämnaren uppenbarligen är positiva. Således är $f(x_1) - f(x_2) < 0$ och f alltså strängt växande.

Exempel 1.68 Funktionen i det föregående exemplet är däremot *inte* strängt monoton på hela R ty vi har t.ex att

$$-2 < 3 \text{ och } f(-2) = \frac{1}{5} > \frac{1}{10} = f(3).$$

Varje strängt monoton funktion har givetvis en invers. Om f är strängt monoton följer ju enligt Definition 1.8 att om $x_1 \neq x_2$ så är antingen $f(x_1) > f(x_2)$ eller $f(x_1) < f(x_2)$ dvs. att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ur Definition 1.7 följer då att f är omvändbar. Vi har därmed visat följande sats.

Sats 1.8 *Varje strängt monoton funktion har en invers.*

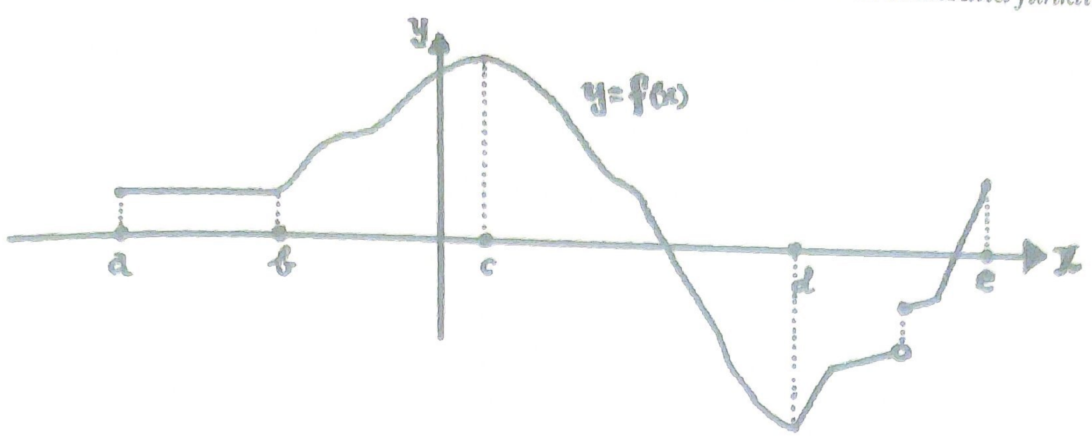
Däremot behöver inte en omvändbar funktion vara monoton. Se exempelvis övning 1.65.

Inversen till en funktion har alltid en invers, nämligen funktionen själv. För alla omvändbara funktioner gäller således

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Om vi byter ut villkoren $f(x_1) < f(x_2)$ och $f(x_1) > f(x_2)$ i Definition 1.8 mot de svagare villkoren $f(x_1) \leq f(x_2)$ respektive $f(x_1) \geq f(x_2)$ så får vi definitionen av *växande* respektive *avtagande*. Definitionen innebär bl.a att en funktion som är konstant på ett intervall sägs vara både växande och avtagande där. Detta kan möjligen tyckas märkligt. I en del böcker använder man därför uttrycket *icke-avtagande* istället för växande.

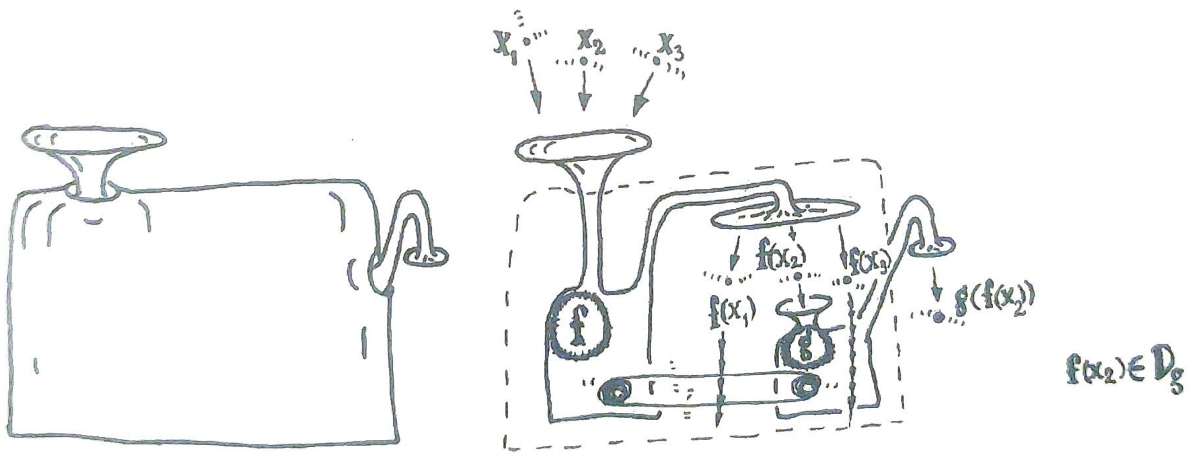
Exempel 1.69 I figuren nedan illustreras de i Definition 1.7 och 1.8 införda begreppen.



På intervallet $[a, b]$ är f växande.
På intervallet $[a, b]$ är f avtagande.
På intervallet $[b, c]$ är f strängt växande.
På intervallet $[c, d]$ är f strängt avtagande.
På intervallet $[d, e]$ är f strängt växande.
På intervallet $[a, c]$ är f monoton, men inte strängt monoton.
På intervallet $[a, d]$ är f inte monoton.

1.16 Sammansatta funktioner

Om man tar bort ytterhöljet på en maskin kan det ibland visa sig att den är sammansatt av två eller flera maskiner. Så förhåller sig det ofta även med "funktionsmaskiner".



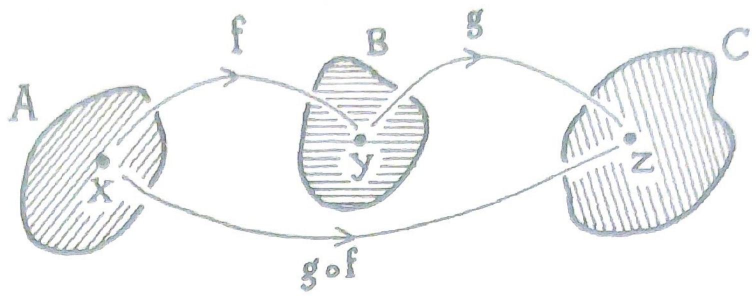
En sådan funktionsmaskin, som är uppbyggd av först f och sedan g, spottar ut $g(f(x))$ om man stoppar in ett $x \in D_f$. Ett vanligt sätt att skriva är $g \circ f$ som utläses "g boll f" eller "g ring f". Vi har alltså $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Givetvis förutsätter en sådan här sammansättning att det element $f(x)$ som kommer ut ur f och skall in i g verkligen tillhör D_g.

Vi sammanfattar resonemanget och formulerar det utan "maskiner" på följande sätt:

Definition 1.9 Den sammansatta funktionen $g \circ f$ från A till C definieras genom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

där f är en funktion från A till B och g en funktion från B till C.



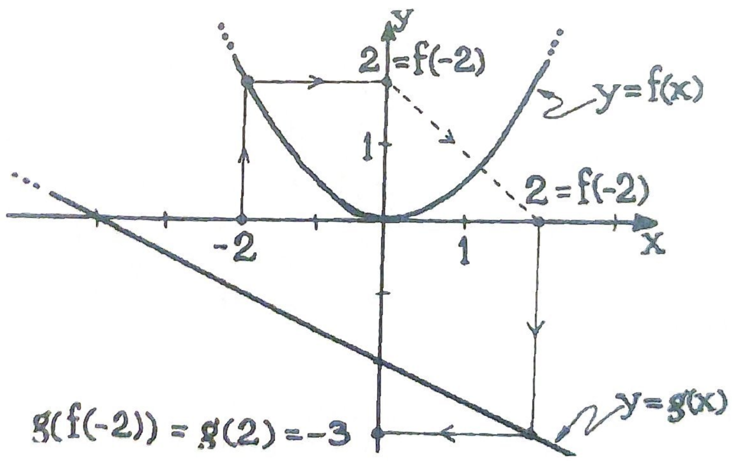
$$\begin{array}{ll} y = f(x) & x \in D_f \\ z = g(y) = g(f(x)) & f(x) \in D_g \\ z = (g \circ f)(x). & \end{array}$$

Resonemanget hittills har varit tämligen abstrakt. Det är givetvis viktigt, både för blivande ingenjörer och andra, att också ha klart för sig hur man bildar $g(f(x))$ om $f(x)$ och $g(x)$ är givna av kända uttryck.

Exempel 1.70 Ange uttrycket för $g(f(x))$ om $f(x) = x^2 + 3x$ och $g(x) = 2x - 8$.

Lösning: Vi får $g(f(x)) = 2f(x) - 8 = 2\left(x^2 + 3x\right) - 8 = 2x^2 + 6x - 8$.

Exempel 1.71 Om $f(x) = x^2/2$ och $g(x) = -x/2 - 2$ får vi $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(2) = -3$.



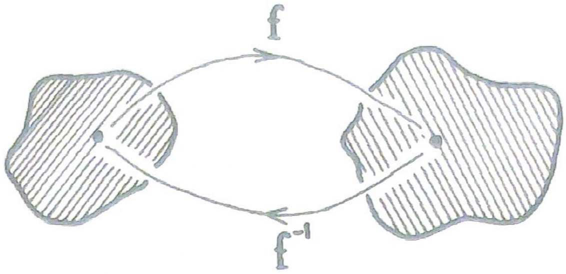
Den kommutativa lagen gäller i många sammanhang, men inte i detta. Man får alltså inte förledas att tro att $g \circ f$ och $f \circ g$ är samma sak. Vi kan använda oss av exempel 1.71 för att illustrera detta. Med exemplets beteckningar har vi $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-1) = 1/2$ medan $(g \circ f)(-2) = -3$.

Följande gäller däremot:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \text{ för alla } x \in D_f$$

och

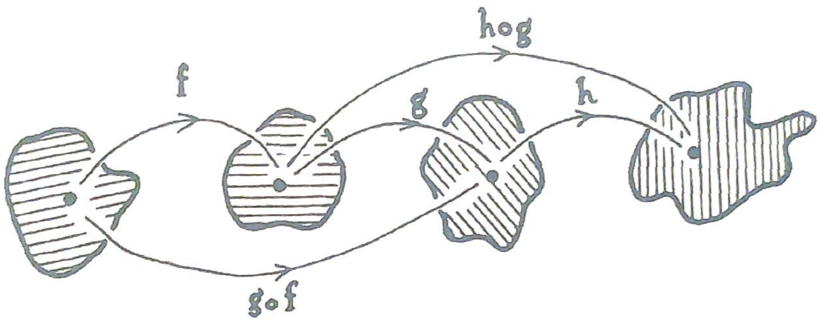
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f(f^{-1}(x)) = x \text{ för alla } x \in D_{f^{-1}} = V_f.$$



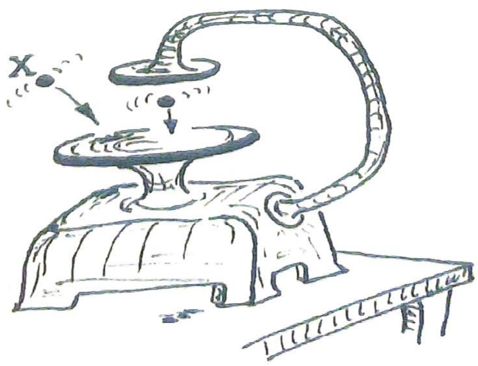
Vid sammansättning av funktioner kan vi sätta parenteser hur som helst, dvs. den associativa lagen

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

gäller. Detta är inte alltför svårt att inse med hjälp av följande figur.



Man kan alltså skriva sammansättningar av tre (eller flera) funktioner utan parenteser, t.ex. $h \circ g \circ f$. Upprepade sammansättningar av en funktion med sig själv kallas *iterationer,* av latinets *iteratio* = upprepa. Beräkningsmetoder som bygger på iteration (iterativa metoder) kommer ofta till användning i praktiken. De passar bra när man har tillgång till en dator, för då kan man göra många upprepningar på kort tid.



Exempel 1.72 Sätt $f(x) = x^2$ och bestäm den n:te itererade funktionen $f_n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n st. f).

Lösning: Vi får $f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \left(x^2\right)^2 = x^4$, $f_3(x) = \left(x^4\right)^2 = x^8$, ..., $f_n(x) = x^{2^n}$.
(Här döljer sig egentligen ett induktionsbevis. Vill man resonera strikt logiskt bör detta induktionsbevis genomföras.)

Exempel 1.73 Sätt $g(x) = 1 - x^2$. Då får vi

$$(g \circ g)(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4$$

och

$$(g \circ g \circ g)(x) = ((g \circ g) \circ g)(x) = 2\left(1 - x^2\right)^2 - \left(1 - x^2\right)^4 = 1 - 4x^4 + 4x^6 - x^8$$

eller

$$(g \circ g \circ g)(x) = (g \circ (g \circ g))(x) = 1 - \left(2x^2 - x^4\right)^2 = 1 - 4x^4 + 4x^6 - x^8.$$

1.17 Elementära funktioner

Uttryck av typen

$$3x^4 + 4x^2 - 8x + 16,\ \frac{32x^3 + 8x^2 - 3x}{2x^2 + 5x - 1854},\ e^{4x},$$
$$\ln(4 + x),\ x^{4/3} + 5x^{\sqrt{2}},\ \cos 3x + 5 \sin 2x,\ \arctan x$$

är från gymnasieskolans kurs åtminstone delvis kända. De är exempel på polynom, rationella funktioner, exponential-, logaritm- och potensfunktioner samt trigonometriska och cyklometriska funktioner. Dessa funktioner och sammansättningar av dem utgör den klass som man brukar kalla *elementära funktioner*. I detta avsnitt skall vi repetera hur man definierar dessa och gå igenom några av deras grundläggande egenskaper.

1.17.1 Polynom

Definition 1.10 En *polynomfunktion* (ett *polynom*) är en funktion som kan skrivas

$$y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{29}$$

där koefficienterna $a_n, \ldots, a_0$ är givna tal och där n är ett naturligt tal. Vi har $D_p = R$.

I detta sammanhang tolkar vi a_0 som $a_0 x^0$ och de konstanta funktionerna uppfattas därmed också som polynom.

Exempel 1.74 $y = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 18x + \sqrt{13}$ definierar ett polynom, men däremot inte $y = 4x^3 + 5x^{1/2}$, ty exponenterna måste vara naturliga tal.

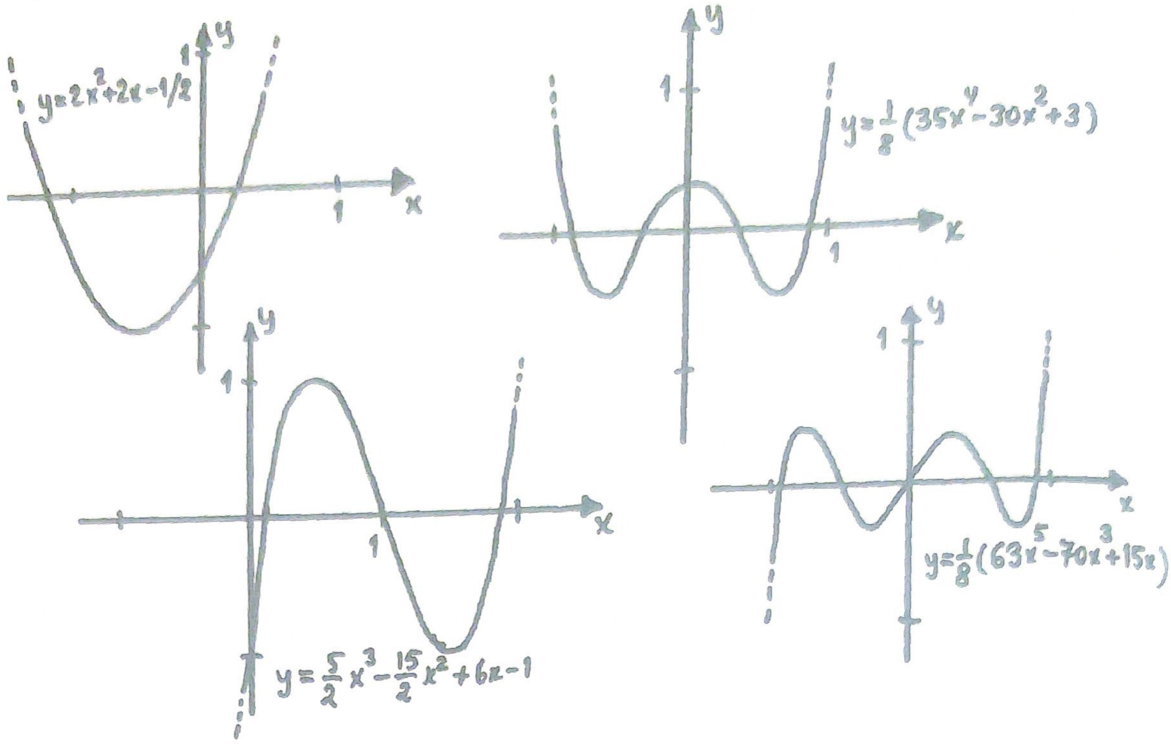
Exempel 1.75 $y = 1/x = x^{-1}$ definierar inte ett polynom, även om exponenten är ett heltal, ty exponenten får inte vara negativ.

Om $a_n \neq 0$ i (1.29) sägs polynomet vara av grad n, eller ett n:tegradspolynom. Koefficienten för den högsta förekommande potensen av x brukar man kalla för *ledande koefficient* och termen $a_n x^n$ för *ledande term*. Alla de värden på x för vilka $p(x) = 0$ kallas *nollställen*. Ett polynom av grad n har högst n stycken reella nollställen. Mer om detta i avsnitt 9.6.

Exempel 1.76 Polynomet $p(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 64x + 44$ är av grad fem med ledande koefficient 1 och ledande term x^5; ett nollställe är 1, ty $p(1) = 0$.

Exempel 1.77 Polynomet $k(x) = 4$ för alla x är ett konstant polynom, ett polynom av grad 0.

Några typiska grafer av polynom ges i nedanstående figur.



1.17.2 Rationella funktioner

Rationella funktioner definieras på följande sätt.

Definition 1.11 Antag att T och N är polynom. Funktionen r, definierad genom

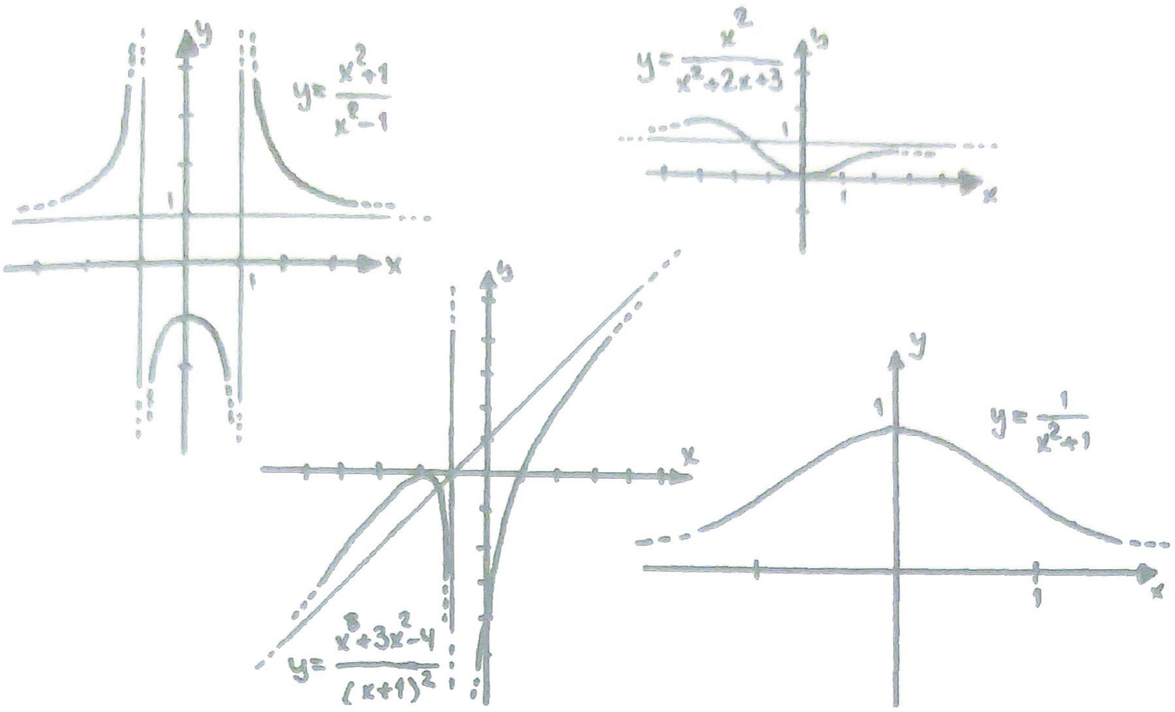
$$r(x) = \frac{T(x)}{N(x)},$$

kallas för en *rationell funktion.* Definitionsmängden D_r utgörs av alla x för vilka $N(x) \neq 0$.

En rationell funktion är alltså en kvot mellan polynom på samma sätt som ett rationellt tal är en kvot mellan två heltal. Polynom och heltal har en del gemensamma egenskaper. Jämför av exempelvis $3597 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7$ och $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + 9x + 7$. Sätt gärna upp divisionerna $p(x)/(3x+2)$ och 3597/32 och jämför.

Exempel 1.78 Funktionen $r(x) = \dfrac{4x^2 + 3x - 8}{x^3 + 18x + 6}$ är rationell, men däremot inte $s(x) = \dfrac{4x}{1 + \sqrt{x}}$, ty i det sista fallet är nämnaren inte ett polynom.

Varje polynom är en rationell funktion, ty vi kan i ovanstående definition välja $N(x) = 1$ för alla x. I figuren visas några rationella funktioners grafer.



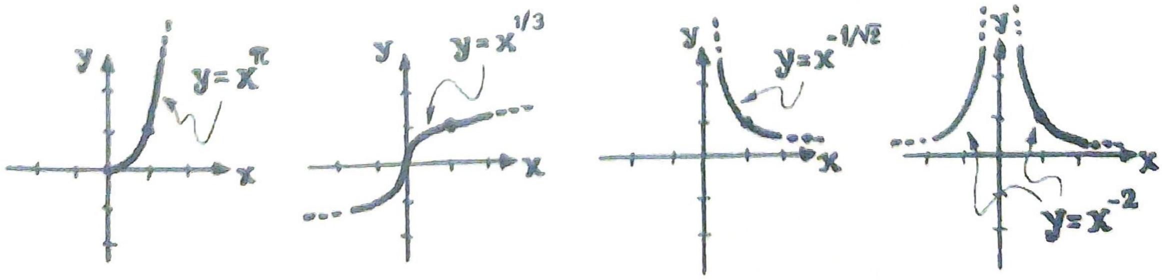
1.17.3 Potensfunktioner

Man kan definiera a^b för godtyckliga positiva tal a och godtyckliga reella tal b. Om vi håller b fixt och ersätter a med variabeln x så får vi en potensfunktion.

Definition 1.12 Funktionen $x \curvearrowright y = x^b$ ($b \in R$, b fixt) kallas en *potensfunktion.* Dess definitionsmängd är åtminstone R_+, men kan för vissa b-värden vara större.

Funktionerna f, g, h och p definierade nedan är potensfunktioner med varierande definitionsmängder.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = x^{\pi} & D_f = \{x; x \geq 0\} \\
g(x) = x^{1/3} & D_g = R \\
h(x) = x^{-1/\sqrt{2}} & D_h = R_+ \\
p(x) = x^{-2} & D_p = \{x; x \neq 0\}
\end{array}
$$

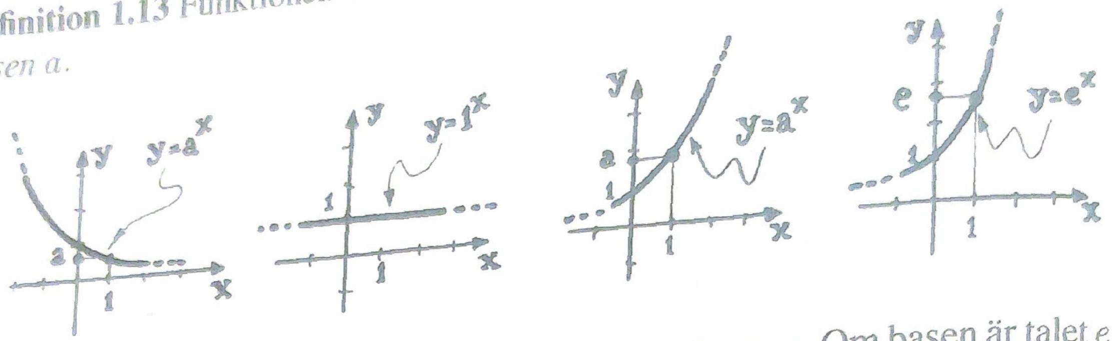


Exempel 1.79 Uttrycken 2^x eller x^{1/x^2} definierar inte någon potensfunktion; exponenten skall vara konstant och får inte bero av x.

1.17.4 Exponentialfunktionen

Om vi i a^b låter a vara fixt och varierar b så får vi en exponentialfunktion.

Definition 1.13 Funktionen $x \curvearrowright y = a^x,\ a > 0$ kallas en *exponentialfunktion* med basen a.



För uttrycket a^x används även skrivsättet $\exp_a x$ eller $^a \exp x$. Om basen är talet $e = 2.7182...$ (e kommer att definieras i kapitel 2, 121) så skriver vi e^x eller $\exp x$. När man säger *exponentialfunktionen* i bestämd form menar man normalt funktionen e^x. Exponentialfunktioner förekommer i praktiken i många situationer, t.ex. då man behandlar tillväxt och sönderfall. Basen e visar sig vara speciellt lämplig eftersom funktionen e^x är sin egen derivata.

Vi påminner om de viktiga räkneregler som gäller för exponentialfunktioner:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Exempel 1.80 Jordens befolkning antas öka med 3% per år. Hur lång tid tar det innan folkmängden fördubblats?

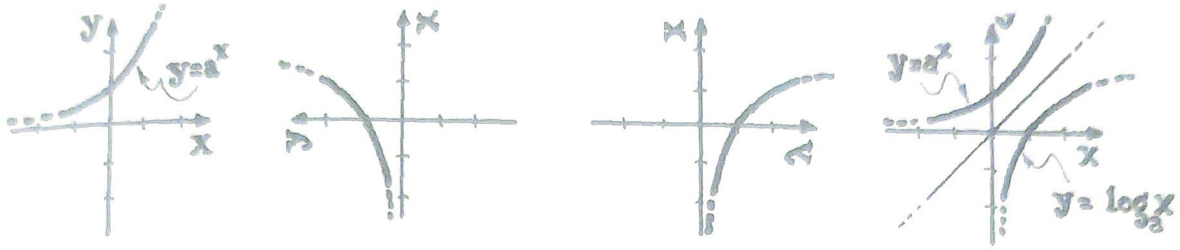
Lösning: Låt $N(t)$ vara folkmängden vid tiden t. Då gäller $N(t+1) = 1.03N(t)$, $N(t+2) = 1.03^2 N(t)$, ..., $N(t+x) = 1.03^x N(t)$, x heltal. Men folkmängden ökar ju inte språngvis efter hela år. Det är därför rimligt att utgå ifrån att formeln gäller för godtyckliga reella tal x. Vi söker det värde på x för vilket

$$2N(t) = 1.03^x N(t)$$

dvs. $1.03^x = 2$. Med hjälp av miniräknare kan man se att $1.03^{24} = 2.0328$. Det tar alltså knappt 24 år för befolkningen att fördubblas.

1.17.5 Logaritmfunktionen

Från gymnasieskolans kurs bör det vara känt att varje exponentialfunktion med basen a är strängt avtagande om $0 < a < 1$ och strängt växande om basen $a > 1$. Eftersom varje exponentialfunktion med $a \neq 1$ alltså är strängt monoton så existerar inversen.



Definition 1.14 Inversen till en exponentialfunktion med basen a kallas för en *logaritmfunktion* med basen a. Vi skriver $y = \log_a x$. Vi har $D_{\log_a} = R_+$ och $V_{\log_a} = R$.

Basen är normalt ett tal $a > 1$. Om basen är $e = 2.7182...$ använder vi beteckningen $\ln x$ eller $\log x$ och talar om den *naturliga logaritmen.* Om basen är 10 använder man ofta beteckningen lg i stället för $\log_{10}$. I vissa sammanhang, t.ex. inom informationsteknik, använder man inte sällan basen 2. Andra baser förekommer knappast i praktiken.

Innebörden av logaritmdefinitionen kan uttryckas på följande sätt:

$$y = a^x \iff x = \log_a y. \tag{30}$$

Vi kan också skriva

$$y = a^{\log_a y}$$

vilket ofta är användbart när man skall behandla uttryck där både bas och exponent är variabla. Vi får exempelvis $x^x = e^{x \ln x}$, $x^{1/x^2} = e^{(\ln x)/x^2}$ och generellt $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

Räknelagarna för exponentialfunktionen har sina direkta motsvarigheter i räknelagar för logaritmen:

1. $\log_a 1 = 0$,
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$,
3. $\log_a x^y = y \log_a x$,
4. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$,

5. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$

6. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}.$

Dessa räkneregler visas med hjälp av räknereglerna för exponentialfunktionen.

Exempel 1.81 Visa att $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ om $a > 0$, $x > 0$ och $y > 0$.

Lösning: Sätt $u = \log_a x$ och $v = \log_a y$. Då gäller enligt (1.30) att $x = a^u$ och $y = a^v$. Enligt räkneregel 2. för exponentialfunktionen får vi $xy = a^u a^v = a^{u+v}$. Men enligt (1.30) betyder detta att $u + v = \log_a xy$ och räkneregel 2 för logaritmen är därmed visad.

Exempel 1.82 Visa att $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Lösning: Sätt $u = \log_a x$ dvs. $x = a^u$. Vi kan skriva om a på formen $a = b^{\log_b a}$ och får med användning av detta

$$x = a^u = \left(b^{\log_b a}\right)^u = b^{u \log_b a} = b^{\log_a x \cdot \log_b a}.$$

Av detta följer enligt (1.30) att $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ och regel 6 är därmed visad.

Exempel 1.83 I exempel 1.80 skulle vi ha kunnat använda logaritmer för att bestämma x ur ekvationen $2 = 1.03^x$. Logaritmering av båda leden ger nämligen $\lg 2 = x \lg 1.03$ dvs. $x = \lg 2/\lg 1.03 \approx 0.3010/0.0128 \approx 23.51$.

Exempel 1.84 För radioaktivt sönderfall gäller formeln $m = m_0 e^{-\lambda t}$, där m är ämnets massa vid tiden t, m_0 ämnets massa vid tiden $t = 0$ och λ en konstant. Antag nu att ett radioaktivt ämne med massan 230 g sönderfaller så att det efter 150 minuter endast återstår 170 g. Hur mycket återstår efter ytterligare 90 min.?

Lösning: Vi har sambanden

$$170 = 230e^{-\lambda 150} \text{och } m = 230e^{-\lambda 240}.$$

Logaritmering (bas e, dvs. den naturliga logaritmen) ger

$$\log 170 = \log 230 - 150\lambda \text{ och } \log m = \log 230 - 240\lambda$$

vilket i sin tur ger

$$\log m = \log 230 - \frac{240}{150}(\log 230 - \log 170) \approx 4.9544.$$

Med hjälp av miniräknare finner vi $m = e^{\log m} \approx 142$.

1.17.6 Hyperboliska funktioner

De s.k. *hyperboliska funktionerna* bör man känna till, trots att de egentligen inte innebär något nytt; de är helt enkelt speciella rationella funktioner av e^x. Det visar sig emellertid ibland praktiskt att använda dem. Vi har följande definition:

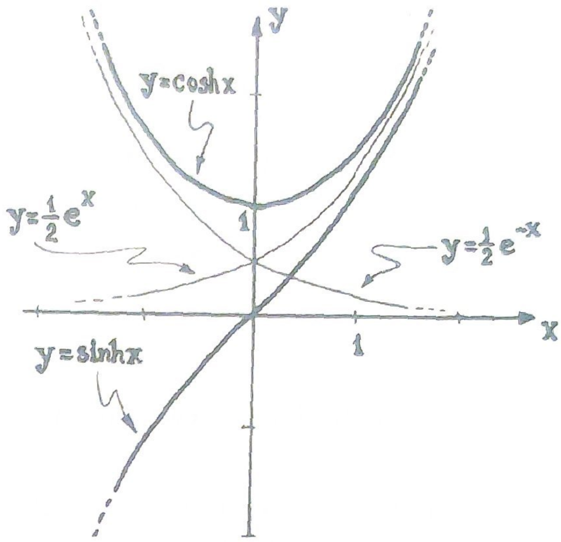
Definition 1.15 Vi definerar

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{cosinus hyperbolicus}$$

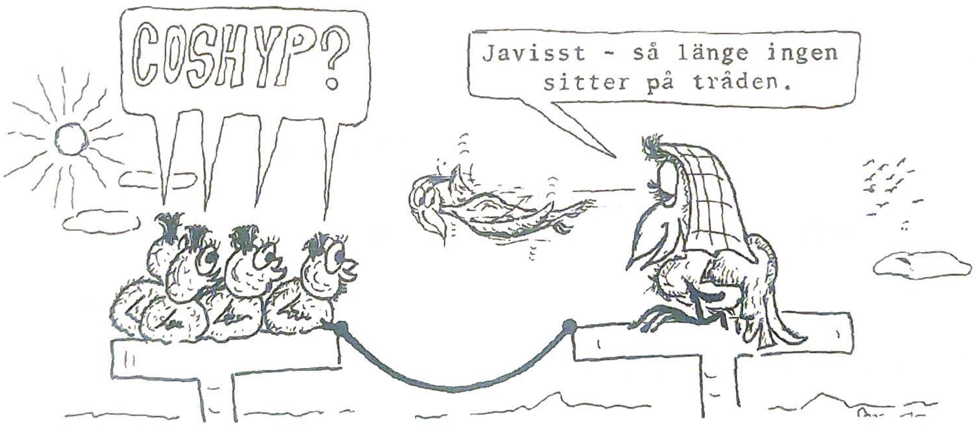
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{sinus hyperbolicus}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{tangens hyperbolicus}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \text{cotangens hyperbolicus}$$

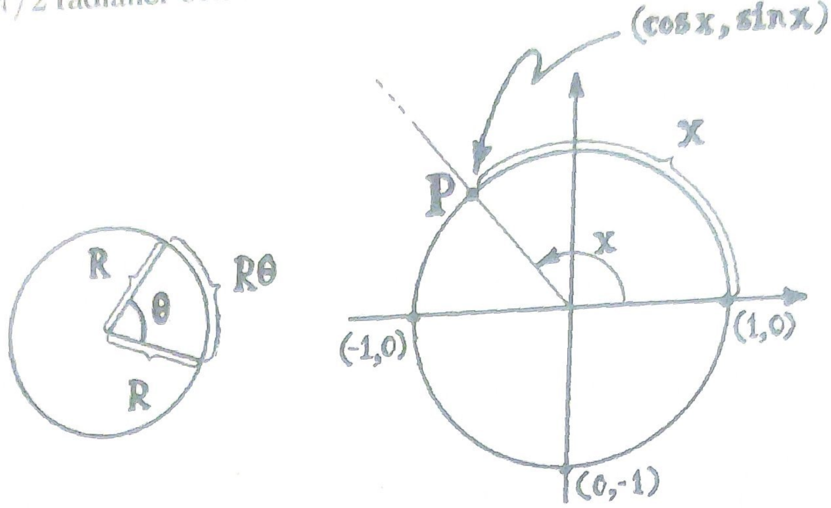


Man kan exempelvis visa att en fritt hängande jämntjock och perfekt böjlig kabel följer en cosh-kurva.



1.17.7 Trigonometriska funktioner

De *trigonometriska funktionerna* spelar en central roll i många sammanhang, t.ex. då man behandlar svängnings- och rotationsproblem. Vi påminner först om *radianmåttet* för vinklar. Antag att x är ett reellt tal. Utgående från punkten $(1, 0)$ i ett ortonormerat koordinatsystem avsätts längs enhetscirkeln (en cirkel med radie 1 och centrum i origo) avståndet $|x|$ i positiv led (moturs) om $x > 0$ och i negativ led om $x < 0$. På så sätt fastläggs en punkt P på cirkeln. Drag sedan halvlinjen mellan origo O och P. Vi får en riktad vinkel av storleken x radianer. En rät vinkel svarar således mot $\pi/2$ radianer och ett helt varv mot 2π radianer.



Vi kan nu definiera de trigonometriska funktionerna.

Definition 1.16 Låt x vara ett godtyckligt tal och välj punkten P på enhetscirkeln så att linjen OP bildar vinkeln x med förstaaxeln. Vi säger då att punkten P har koordinaterna $(\cos x, \sin x)$, dvs. $\cos x$ definieras som förstakoordinaten för P och $\sin x$ definieras som andrakoordinaten.

Vidare definieras

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ och } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}, \quad x \neq k\pi.$$

Vi ser att $\sin k\pi = 0$ och att $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ för alla heltal k.

Vi påminner härnäst om ett antal viktiga *trigonometriska formler* som vi dock avstår från att bevisa.

Sats 1.9 *Följande samband gäller:*

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
2. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
3. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
4. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
5. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
6. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

7. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

8. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

9. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

10. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

11. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

12. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

13. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

14. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

15. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

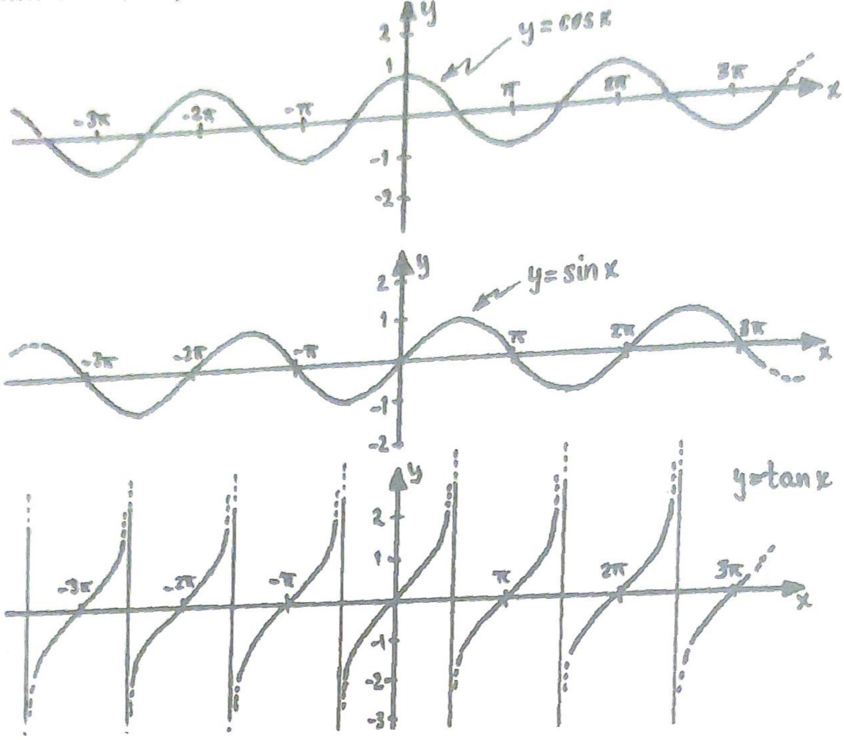
16. $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

17. $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

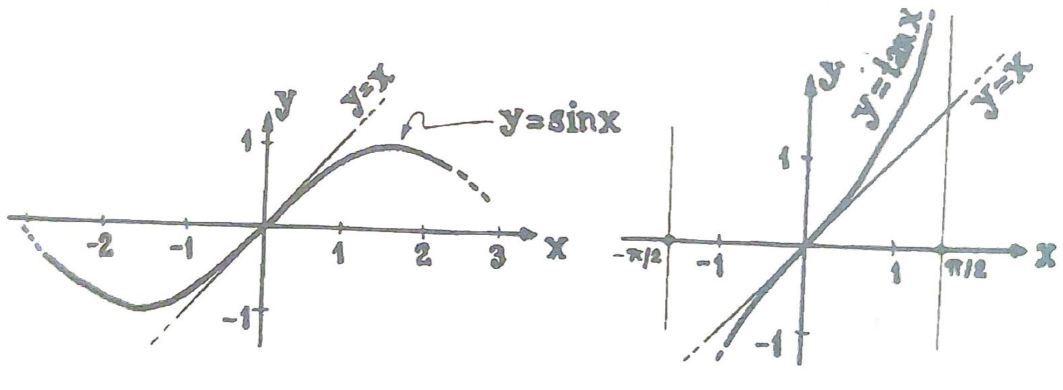
18. $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

19. $\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Sinus och cosinus är definierade för alla reella tal x och vi talar om sinusfunktionen, cosinusfunktionen respektive tangensfunktionen, definierade genom $x \curvearrowright y = \sin x$ osv. Tangensfunktionen är definierad för alla $x \neq k\pi$ och cotangensfunktionen för alla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k heltal. Av definitionerna framgår att såväl cosinus- som sinusfunktionen är *periodisk* med (minsta) period 2π. Skall vi rita motsvarande kurvor räcker det alltså att betrakta ett intervall av längd 2π, t.ex. intervallet $[0,2\pi]$, för att få en bild. För tangensfunktionen tar vi intervallet $(-\pi/2,\pi/2)$ ty den, liksom cotangensfunktionen, är periodisk med (minsta) period π.



En titt på sinuskurvan och ett försök att rita in linjen $y = x$ ger anledning att misstänka att denna linje ligger över kurvan för $x > 0$ och under den för $x < 0$. Om vi försöker göra motsvarande sak för tangensfunktionen verkar det som om linjen ligger under kurvan $y = \tan x$ för $x > 0$ och över den för $x < 0$.



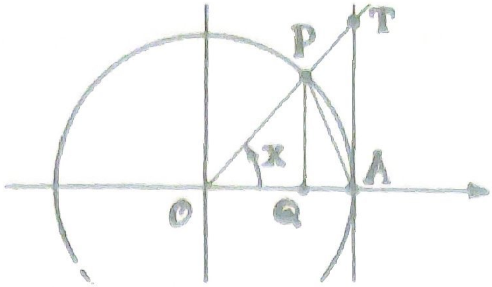
Följande två satser visar att dessa observationer är korrekta. (Se även övningarna 1.96 och 1.97.)

Sats 1.10 *För alla* $x > 0$ *gäller att* $\sin x < x$.

Bevis: Om $x > 1$ är saken klar, ty $\sin x \leq 1$ för alla x. Antag alltså att $0 < x \leq 1$ och betrakta nedanstående figur. En jämförelse mellan areorna ger att arean av triangeln OAP är mindre än arean av cirkelsektorn OAP.

Men triangelns area är $\frac{1}{2} \cdot (\textit{längden av } OA) \cdot (\textit{höjden}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$ och cirkelsektorns area är $\frac{1}{2} \cdot (\textit{längden av } OA) \cdot (\textit{längden av bågen } \widehat{AP}) = \frac{x}{2}$.

Ur detta följer den sökta olikheten.



Sats 1.11 *För alla x, $0 < x < \pi/2$, gäller att* $\tan x > x$.

Bevis: Vi jämför återigen areor och ser att arean av sektorn OAP är mindre än arean av triangeln OAT, som är $\frac{1}{2}\tan x$. Resultatet följer som i föregående sats.

Funktioner av typen $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ dyker inte så sällan upp i skilda tekniska tillämpningar, som exempelvis då man behandlar svängningsfenomen. Uttrycket går alltid att skriva om på följande sätt.

$$\begin{aligned}
&A\cos\omega x + B\sin\omega x = \\
&= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega x\right) = \\
&\qquad = \sqrt{A^2+B^2}\,(\sin\lambda\cos\omega x + \cos\lambda\sin\omega x)
\end{aligned}$$

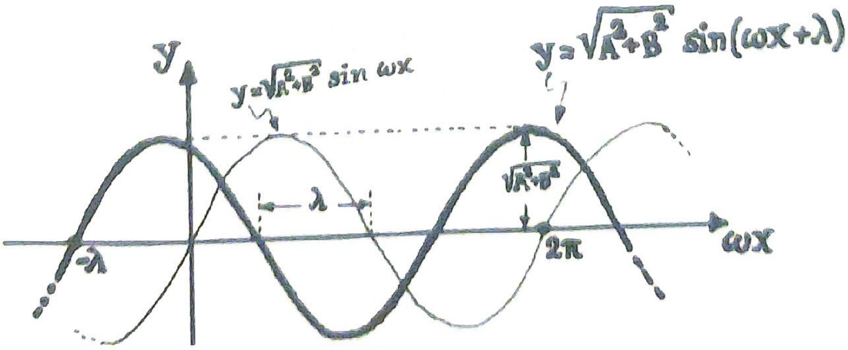
där vi valt λ så att

$$\begin{cases} \sin\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \cos\lambda = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

vilket alltid är möjligt eftersom $\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ är en punkt på enhetscirkeln. Men enligt formel 8 i Sats 1.9 68 är $\sin\lambda\cos\omega x + \cos\lambda\sin\omega x = \sin(\omega x + \lambda)$ och vi kan alltså skriva

$$A\cos\omega x + B\sin\omega x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega x + \lambda)\,.$$

Fördelen med det sista uttrycket är att det ger oss möjlighet att direkt utläsa fasförskjutningen λ och amplituden $\sqrt{A^2+B^2}$.



Exempel 1.85 Bestäm amplitud och fasförskjutning hos $y = 4\cos 5x - 6\sin 5x$.

Lösning: Vi börjar med att bryta ut $\sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ och får

$$y = 2\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos 5x + \frac{-3}{\sqrt{13}}\sin 5x\right).$$

Vi ska sedan bestämma λ så att

$$\begin{cases} \sin\lambda = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \cos\lambda = \frac{-3}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Här kan vi sedan inte räkna exakt, men med hjälp av miniräknare ser vi att $\lambda \approx 146.3°$. Vi har alltså fått

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{13}\,(\sin 146.3° \cos 5x + \cos 146.3° \sin 5x) = \\ &= 2\sqrt{13}\sin(5x + 146.3°). \end{aligned}$$

Amplituden är således $2\sqrt{13} \approx 7.2$ och fasförskjutningen är ungefär $146.3°$, dvs. ungefär 2.55 radianer.

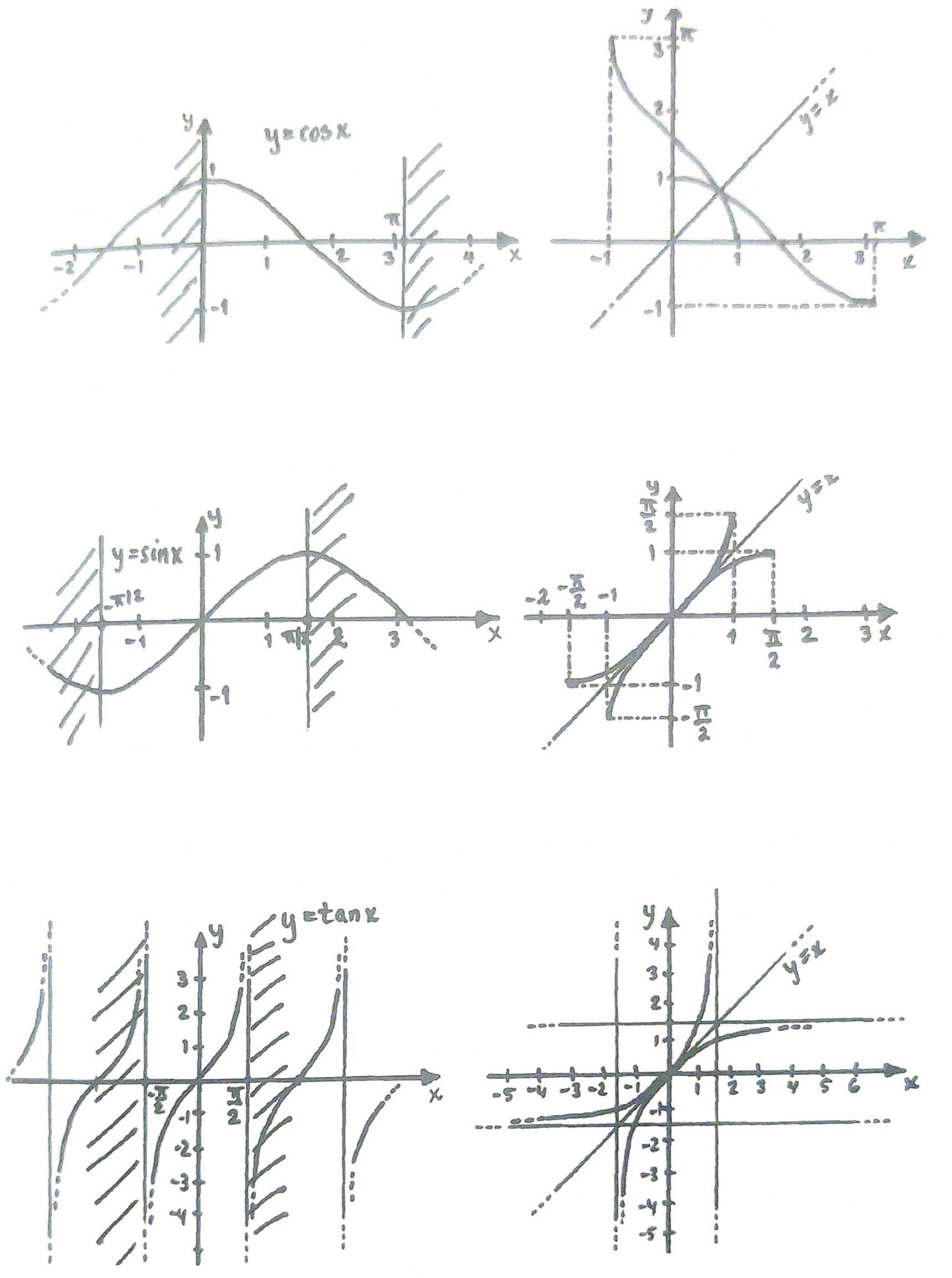
1.17.8 Inversa trigonometriska funktioner

Ingen av de trigonometriska funktionerna har någon invers om funktionerna betraktas på hela det vanliga definitionsområdet. Emellertid visar det sig praktiskt att titta på intervall, så stora som möjligt, där funktionerna är monotona och därför omvändbara. Man har kommit överens om vilka intervall man ska välja och vi definierar inverserna där.

Definition 1.17 *De cyklometriska funktionerna* eller *arcusfunktionerna* är inverser till de trigonometriska funktionerna på vissa speciella intervall, nämligen:

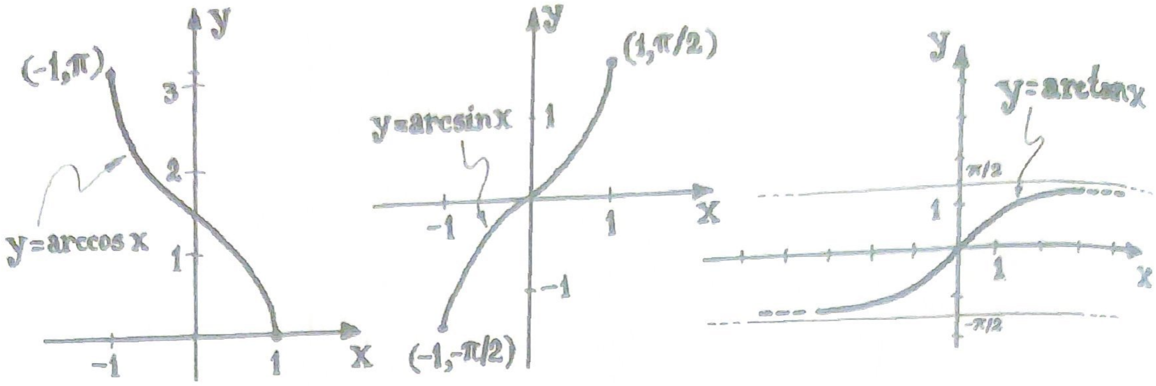
$y = \arccos x$ är inversen till $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$,
$y = \arcsin x$ är inversen till $y = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$,
$y = \arctan x$ är inversen till $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Ibland brukar man också införa en *arcuscotangensfunktion*, som är inversen av $y = \cot x$ på intervallet $0 < x < \pi$. Beteckningarna $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, respektive $\tan^{-1}$ förekommer inte sällan i stället för arccos, arcsin respektive arctan.



Ur definitionerna får vi, eftersom funktionens definitionsmängd är inversens värdemängd och tvärtom, att

$$
\begin{aligned}
D_{\text{arccos}} &= [-1, 1] \qquad V_{\text{arccos}} = [0, \pi]\,, \\
D_{\text{arcsin}} &= [-1, 1] \qquad V_{\text{arcsin}} = [-\pi/2, \pi/2]\,, \\
D_{\text{arctan}} &= R \qquad\qquad V_{\text{arctan}} = (-\pi/2, \pi/2)\,.
\end{aligned}
$$



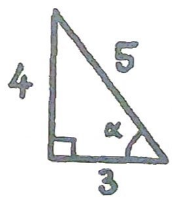
Ur definitionerna följer också, eftersom $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$, följande, för all användning viktiga, samband:

$$
\begin{aligned}
y = \arccos x \quad &\iff \quad 0 \leq y \leq \pi \text{ och } x = \cos y, \\
y = \arcsin x \quad &\iff \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \text{ och } x = \sin y, \\
y = \arctan x \quad &\iff \quad -\pi/2 < y < \pi/2 \text{ och } x = \tan y.
\end{aligned}
$$

Exempelvis den andra "regeln" kan vi läsa ut på följande sätt: *"Arcussinus för ett tal (mellan -1 och 1) är den vinkel mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$ vars sinus är talet."*

Exempel 1.86 $\arccos 1/2 = \pi/3$, $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$, $\arccos \sqrt{3}/2 = \pi/6$, $\arctan 1 = \pi/4$. Däremot är inte $\arcsin \pi$ definierat. Det finns ju inget y så att $\sin y = \pi$.

Exempel 1.87 De cyklometriska funktionerna kan användas för att uttrycka triangelvinklars storlek (i radianer). Med figurens beteckningar gäller $\alpha = \arccos 3/5 = \arcsin 4/5 = \arctan 4/3$ ty $0 < \alpha < \pi/2$ och $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = 4/5$ och $\tan\alpha = 4/3$.



Exempel 1.88 Visa att följande formel gäller för alla x:

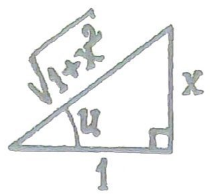
$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Lösning: Inför beteckningarna u och v genom att sätta $u = \arctan x$ och $v = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Då får vi $\tan u = x$ och $-\pi/2 < u < \pi/2$ samt $\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Insättning av $x = \tan u$ i $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ger

$$\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}} = \frac{\tan u}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}} = \frac{\tan u}{\frac{1}{\cos u}} = \sin u$$

Att vi kan säga att $\sqrt{\cos^2 u} = \cos u$ beror på att $\cos u > 0$ i det aktuella intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$. Alltså gäller $\sin v = \sin u$. I det intervall vi betraktar är sinusfunktionen omvändbar och således gäller $u = v$, vilket skulle bevisas.

Vi kan också göra ett geometriskt bevis. Antag först att $x > 0$ och rita en rätvinklig triangel med kateterna 1 och x.



Från triangeln kan vi dra slutsatsen dels att $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dels att $u = \arctan x$. Påståendet följer därför för $x > 0$. Om $x = 0$ är påståendet uppenbarligen sant. Om $x < 0$ använder vi att $\arctan x = -\arctan(-x)$ samt $\arcsin x = -\arcsin(-x)$ och utnyttjar det vi just visat för positiva x-värden.

1.18 Övningar

1.18.1 Logik och ekvationer

1.1 Nedan anges utsagorna A och B. Skriv implikationspil mellan A och B så att man får korrekt(a) implikation(er).

a) A : n är mindre än 7. $\quad B$: n är mindre än 12.
b) $A : t^2 < 4$. $\quad B : t < 2$.
c) $A : 4x + 3 < 3x - 8$. $\quad B : x < -11$.
d) A : $m + n$ är jämnt. $\quad B$: m och n är udda.

1.2 Kan $*$ ersättas med något av tecknen $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$? Ange i så fall vilket (eller vilka).

a) $x + 3 = 8 \quad * \quad x - 4 = 1,$
b) $\sqrt{10 - x^2} = 3x \quad * \quad x = 1,$
c) $\sqrt{10 - x^2} = 3x \quad * \quad x^2 = 1,$
d) $x = 3 \quad * \quad x^2 - 9 = 0,$
e) $\cos x = -1 \quad * \quad x = \pi,$
f) $x^2 + 3x = 0 \quad * \quad x + 8 = 0.$

1.3 För vart och ett av nedanstående påståenden skriv dess negation *utan* att använda frasen: "Det är inte så att ...". *Till exempel*: X : Alla udda tal är delbara med 3.

$icke - X$: Det finns udda tal som inte är delbara med 3.
A : Det finns jämna tal som inte är delbara med 7,
$B : x \geq 7$,
C : Inga primtal är jämna,
D : Alla tal som slutar på 0 är delbara med 10.

1.4 Lös ekvationen
a) $x^3 = 9x$, b) $2x^3 = 32x$, c) $x^4 = 27x$, d) $(x-2)^3 = 25(x-2)$.

1.5 Lös ekvationssystemet
a) $\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$, b) $\begin{cases} (x-2)(x+y) = 0 \\ x^2 + 2y = 8 \end{cases}$.

1.6 Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ (x^2 + y^3)(x + y^3) = 0 \end{cases}$.

1.7 Skriv utan beloppstecken
a) $|6|$, b) $|-14|$, c) $|\sqrt{7} - 2|$, d) $|5 - \sqrt{29}|$,
e) $|e - \pi|$, f) $|4\pi - 16|$, g) $|\sqrt{7} - \sqrt{5}|$, h) $|-\sqrt{2} - \sqrt{13}|$,
i) $|\sqrt[3]{7} - 2|$, j) $|-\pi - 13|$.

1.8 Antag att $2 < x < 5$. Skriv utan beloppstecken uttrycket
a) $|x-1|$, b) $|-x-7|$, c) $|x+3|$,
d) $|x-9|$, e) $|x-3|$, f) $|x-4|$.

1.9 Lös ekvationen
a) $|x-6| = 3$, b) $|x-5| = 7$, c) $|x+4| = 9$, d) $|x+12| = -13$.

1.10 Lös ekvationen
a) $|2x| + x = 6$, b) $2x + |x| = 6$.

1.11 Lös ekvationen
a) $|(x+1)(x-3)| = 3$, b) $\left|\dfrac{3x+4}{x-8}\right| = \dfrac{5}{7}$.

1.18.2 Rella tal, olikheter

1.12 Lös olikheten
a) $|x| < 6$, b) $|x-4| < 3$, c) $|x+8| < 2$, d) $|x+4| \geq 1$.

1.13 Skriv med hjälp av absolutbelopp intervallet
a) $[2, 10]$, b) $(5, 7)$, c) $[3, 12]$, d) $(-8, 12)$.

1.14 Antag att för de reella talen x och y gäller $|x-3| \leq 4$ och $|y-3| \leq 3$. Visa att $|x-y| \leq 7$ och $|x+y| \leq 13$.

1.15 u ligger högst 0.05 ifrån 0.9 och v högst 0.08 ifrån 1.2.
a) Hur långt ifrån 2.1 ligger då $u+v$?
b) Hur långt ifrån -0.3 ligger $u-v$?

1.16 Visa att om $x \geq 3$ så gäller $\left|\dfrac{x-2}{x^2-\cos 3x}\right| \leq \dfrac{6}{x}$.

1.17 Visa att om $x > 10^4$ så gäller $\left|\dfrac{2x-8}{x^3-2x-1}\right| \leq 10^{-7}$.

1.18 Visa utgående från olikheterna (1.4) på sidan 21 att för alla $a, b \in R$ gäller $|a+b| \geq ||a|-|b||$.

1.18.3 Summor och produkter

1.19 Skriv med summatecken
a) $2+3+4+5+6+7+8$, b) $5+10+15+20+25+30+35+40$,
c) $6+12+18+\ldots+102$, d) $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots\cdot 19\cdot 22$,
e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{37}$.

1.20 Skriv utan Σ
a) $\sum\limits_{k=1}^{5} k^2$, b) $\sum\limits_{k=1}^{7} \frac{k}{4}$, c) $\sum\limits_{k=2}^{9}(3+2k)$,
d) $\sum\limits_{i=1}^{6}(i^2+1)$, e) $\sum\limits_{j=1}^{10} \frac{(-1)^j}{j+1}$.

1.21 Skriv med produkttecken
a) $7\cdot 9\cdot 11\cdot 13$, b) $2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(-69)$,
c) $(-2)\cdot 3\cdot(-4)\cdot 5\cdot\ldots\cdot 69$, d) $1\cdot 16\cdot 81\cdot 256\cdot\ldots\cdot 160000$.

1.22 Skriv utan Π
a) $\prod\limits_{k=1}^{4} 3k$, b) $\prod\limits_{k=2}^{5}(1-\frac{1}{k})$, c) $\prod\limits_{k=3}^{8}(\frac{1}{7})^k$, d) $\prod\limits_{k=1}^{n} k$.

1.23 Visa (genom direkt uträkning) att uttrycken $\Pi_{k=1}^{3} 4k$ och $4\Pi_{k=1}^{3} k$ inte är lika.

1.24 Beräkna
a) $4+7+10+13+16+19$, b) $14+19+24+29+\ldots+79+84$.

1.25 Femte, trettioförsta och sista termen i en aritmetisk summa är 7, 1/2 resp. −8. Bestäm antalet termer och summans värde.

1.26 Då ett gäng teknologer sammanstrålade tog var och en som anlände samtliga de redan komna i hand. På detta sätt utbyttes sammanlagt 105 handslag. Hur många var teknologerna? (Vi antar att teknologerna anlände en och en.)

1.27 Pröva någon av textens formler för att bestämma värdet av
a) $\sum\limits_{k=1}^{4} 2k$, b) $\sum\limits_{i=0}^{3}(-1)^i$, c) $\sum\limits_{k=1}^{10} 1$, d) $\sum\limits_{j=0}^{151} 1$, e) $\sum\limits_{\nu=1}^{16} 2$.

1.28 Använd textens formler för att beräkna
a) $1+4+16+64+256+1024$, b) $1-4+16-64+256-1024$,
c) $\sum_{k=0}^{10}(-2)^{-k}$, d) $2-6+18-54+162-486$.

1.29 Beräkna värdet av
a) $\prod\limits_{k=1}^{4} 2^k$, b) $\prod\limits_{i=0}^{3}(-1)^i$, c) $\prod\limits_{j=0}^{10} 1$, d) $\prod\limits_{j=0}^{151} 1$, e) $\prod\limits_{\nu=1}^{16} 2$.

1.30 " och bryt inte kedjan, utan sänd utan dröjsmål brev med samma lydelse som detta till tre av Dina vänner, som i sin tur skall skicka brev till tre av sina vänner, etc. Du kommer att få många brev och bli en lyckligare människa! Din tillgivne
K E Djebrev"

Låt oss anta att Djebrev i första omgången startade kedjan med att själv sända ut 20 brev. Om ingen bröt kedjan, hur många brev skulle sammanlagt ha sänts ut efter 10 omgångar?

1.31 Hårdkokte Holger har kommit in på Luleå tekniska universitet. För att klara ekonomin under studietiden har han bestämt sig för att lägga upp en sparplan att genomföras under sommaren före studiernas början. Han tänker sig en blygsam uppläggning första månaden som blir juni (30 dagar). Han bestämmer sig att lägga 1 krona i sparbössan första dagen, så 2 kronor andra dagen, 4 kronor tredje dagen osv., så att han varje dag lägger dubbelt så mycket som närmast föregående dag. Hur stort belopp har Holger sparat ihop när månaden är slut?

1.32 Varje människa har 2 föräldrar, 4 far- och morföräldrar etc. Om vi antar att varje generation svarar mot 30 år och går 20 generationer tillbaka i tiden, hur många anfäder har var och en av oss sammanlagt sedan slutet av 1300-talet?

1.18.4 Induktion

1.33 Visa att för alla positiva heltal n gäller $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$.

1.34 Visa med induktion att summan av de n första positiva udda heltalen är lika med n^2. (Jämför med exempel 1.27 på sidan 28 där påståendet visas på ett enklare sätt.)

1.35 Visa att för alla $n \in Z_+$ gäller

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$,

c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \ldots + n(n+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$,

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1.36 Bevisa formeln $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$, $n \in Z_+$.

1.37 Är nedanstående formel riktig för alla positiva heltal n? Ge bevis eller motexempel.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n + 2).$$

1.38 Visa att för alla $n \in Z_+$ gäller

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

1.39 Visa att för alla positiva heltal n gäller $\sum_{k=n}^{2n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(7n+5)$.

1.40 Visa (med induktion) att för alla positiva heltal n gäller

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

1.41 Visa att $\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot k! < n \cdot (n+1)!$ för alla $n \in Z_+$.

1.42 Visa (med induktion) olikheten $(1 + \frac{1}{\sqrt{1}})(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \ldots (1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq n + 1$ för alla positiva heltal n.

1.18.5 Permutationer, kombinationer, binomialsatsen

1.43 Utveckla a) $(x+1)^4$, b) $(y+z)^3$, c) $(1-x)^4$, d) $(a-b)^5$.

1.44 Utveckla $(x^2+2y)^5$ och $(2x-3y)^4$.

1.45 a) Bestäm koefficienten för x^6 i binomialutvecklingen av $(x^3+\frac{2}{x})^6, x \neq 0$,
b) Bestäm koefficienten för x^3 i binomialutvecklingen av $(x^4-\frac{3}{x})^7, x \neq 0$.

1.46 a) Använd binomialsatsen på $(1+1)^n$ för att visa likheten $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

b) Visa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

1.18.6 Numeriska beräkningar

1.47 Bestäm de absoluta och relativa felet då a) 0.67, b) 0.66 används som närmevärde till 2/3.

1.48 Ange absoluta och relativa felgränser (inte nödvändigtvis de bästa) då π approximeras med 22/7.

1.49 Ange absolutfelgräns, relativfelgräns och ett intervall inom vilket talet ligger om vi har a) 0.05 ± 0.005, b) -1.01 ± 0.01, c) 6300 ± 30.

1.50 Beräkna antalet korrekta decimaler och signifikanta siffror samt approximativ relativfelgräns om vi har
a) 2.7 ± 0.05, b) 2.76 ± 0.03, c) 3 ± 0.5,
d) 17.175 ± 0.001, e) 49.300 ± 0.0001, f) 77 ± 5.

1.51 Beräkna $b+c$, $b-c$, bc och b/c med felgränser då
a) $b = 4 \pm 0.5$ och $c = 8 \pm 1$,
b) $b = 4 \pm 0.5$ och $c = 8.00 \pm 0.01$.

1.52 Avrunda följande tal till en decimal och ange avrundningsfelet.
a) 1.77, b) −2.285, c) −0.047,
d) 0.555, e) 0.25, f) −0.35.

1.53 Vi har $x = 37 \pm 0.5$. Med hur många decimaler räcker det ange π då vi ska beräkna
a) $x+\pi$, b) $\pi - x$, c) πx, d) π / x ?

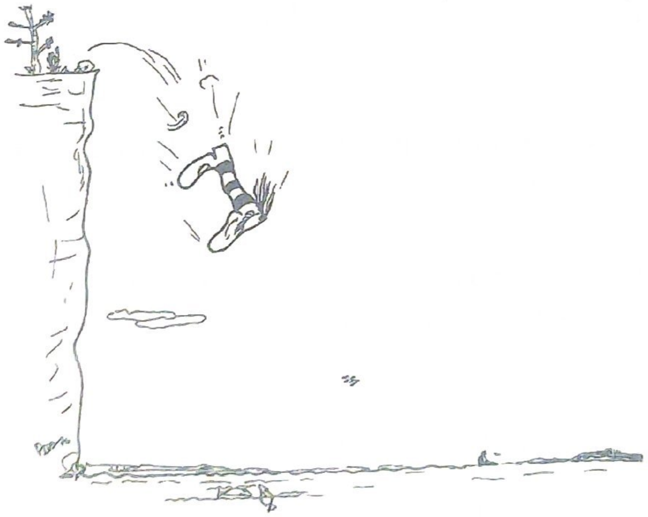
1.54 Sträckan Luleå-Jokkmokk uppges vara 17.3 mil. Bo i Boden litar inte på vägverket utan kör med sin Saab till Luleå och en annan dag med "Merschan" till Jokkmokk och uppmäter sträckorna till 3.8 respektive 14.6 mil. Han vet att mätarna kan slå fel med upp till 5 % respektive 4 %. Bör han ringa vägverket och påstå att de mätt fel?

1.55 En rektangulär gräsyta stegas upp. Sidorna uppmättes till (9 ± 1) m respektive (11 ± 1) m. Ange gräsytans area med felgräns med hjälp av
a) Sats 1.6, b) experimentell störningsräkning.

1.56 Herr S N Åhlman har upptäckt att man vid kassan i snabbköpet försöker vinna kunder genom att generöst avrunda nedåt till närmaste 50-öring. Han förstår att det kan löna sig att passera kassan med en vara i taget.
a) Hur mycket kan man maximalt tjäna om man köper 4 varor?
b) Undersök för olika n den maximala vinsten vid köp av n varor.
c) Hur många varor måste han köpa för att tjäna minst 100 kronor?

1.57 Man vill bestämma volymen av två förpackningar. Den ena är en cylindrisk burk med höjden $h = (10 \pm 0.2)$ cm och diametern $d = (20 \pm 0.4)$ cm. Den andra har formen av en kub med sidan $s = (100 \pm 1)$ cm.
a) Bestäm största och minsta tänkbara värdet på vardera förpackningens volym.
b) Om 100 burkar ska packas i kuben och resten fyllas med sågspån, hur mycket sågspån kan det i värsta fall behövas?

1.58 Ange med feluppskattning fallsträckan s för en kropp som faller i (2.57 ± 0.01) sekunder om man vet att $s = gt^2/2$ och $g = (9.81 \pm 0.02)$ m/s^2.



1.18.7 Funktioner, invers

1.59 Sätt $f(x) = 2x - x^2$ och $D_f = [0, 3]$. Vad blir V_f ? Rita figur.

1.60 Mellan x och y råder sambandet $|x| = y^2$. Definierar detta samband en funktion från R till R?

1.61 Ange största möjliga definitionsmängd för funktionen
a) $y = \sqrt{x-6}$, b) $y = 1/(x+5)$, c) $y = \sqrt[6]{3-x^2}$.

1.62 Nedan finns angivet ett samband mellan x och y. Definerar detta samband en funktion $x \curvearrowright y$? Motivera med figur.
a) $y = x^2 + 4$, b) $x^2 + y^2 = 25$,
c) $|y|^3 = x$, d) $y^3 = x$.

1.63 Funktionen f definieras enligt nedan. Avgör om f är omvändbar. Motivera med hjälp av figur.
a) $f(x) = x^3$, $-\infty < x < \infty$, b) $f(x) = x^4 + 1$, $-\infty < x < \infty$,
c) $f(x) = x^2 + x$, $0 \leq x < \infty$, d) $f(x) = x^2 + x$, $-\infty < x < \infty$,
e) $f(x) = x\,|x|$, $-\infty < x < \infty$.

1.64 Bestäm inversen av f om
a) $f(x) = x^3$, $-\infty < x < \infty$, b) $f(x) = x^2 + x + 1$, $0 \leq x < \infty$,
c) $f(x) = x\,|x|$, $-\infty < x < \infty$.

1.65 Funktionen f definieras genom $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{för } 0 \leq x < 1, \\ 9/2 - 2x & \text{för } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
a) Rita funktionens graf och, i samma diagram, inversen $f^{-1}(x)$.
b) Ange inversen på formen $f^{-1}(x) = \ldots$.

1.66 Man har $f(x) = x^3 - 2$, $-\infty < x < \infty$. Visa med hjälp av definitionen att f är en omvändbar funktion. Bestäm sedan $f^{-1}(6)$.

1.67 Undersök, med hjälp av definitionen, om funktionen f är monoton på I då
a) $f(x) = x^2 + 3$ och $I = [0, 5]$, b) $f(x) = 3/x$ och $I = [-3, -1]$,
c) $f(x) = 1 - x^2$ och $I = [-4, 4]$.

1.68 Visa med hjälp av en figur att funktionen g definierad genom

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1/2, \\ x/3 + 1/12, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

är strängt monoton på hela sin definitionsmängd. Bestäm inversen.

1.69 Antag att f är strängt växande. Vad kan man säga om monotonitetsegenskaperna hos f^{-1}? Rita några typiska figurer.

1.70 Avgör med hjälp av en figur i vilka intervall som f är växande, avtagande, strängt växande eller strängt avtagande om

a) $f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$,

b) $f(x) = |x| - x + 1, -\infty < x < \infty$,

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le 1 \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$.

1.71 Ange uttrycket för $g \circ f$ om
a) $f(x) = 3x^2 - 1$ och $g(x) = 2x + 2$,
b) $f(x) = 1 - x$ och $g(x) = 4x^2$,
c) $f(x) = 1 + 1/x$ och $g(y) = 2y - y^2$,
d) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \ge 1$ och $g(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$.

1.72 Visa att funktionerna f och g är varandras inverser om
a) $f(x) = x^4 + x^2$, $x \ge 0$ och $g(x) = \sqrt{-1/2 + \sqrt{x + 1/4}}$, $x \ge 0$,
b) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$, $x \le 1$ och $g(x) = 2x^2 - x^4$, $x \ge 1$.

1.73 Bestäm $f \circ g$ och $g \circ f$ om
a) $f(x) = 2x$ och $g(x) = x - 1$,
b) $f(x) = x^2$ och $g(x) = 2x + 1$.

1.74 Bestäm den n:te itererade funktionen f_n till f om vi sätter $f_1 = f$, $f_2 = f_1 \circ f$, $f_3 = f_2 \circ f$ osv. och
a) $f(x) = 3x$, b) $f(x) = \sqrt{x}$, c) $f(x) = 2x - 1$.

1.75 Sätt $g(x) = 1 - x$ och bestäm $g \circ g$, $g \circ g \circ g$, ..., $g \circ g \circ \ldots \circ g$ (n st.).

1.18.8 Elementära funktioner

1.76 Vilka av följande uttryck definierar en polynomfunktion $x \curvearrowright y$?
$y = p(x) = 3x^2 - 21x + 30$, $y = q(x) = 3x^{-4} + 8x^4$,
$y = r(x) = \sqrt{3}x^8 - 18x^4 + \sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}$, $y = s(x) = (14x^9 + 18x^2 - 32)^3$.

1.77 Ange grad, ledande koefficient och ledande term för polynomen i övning 1.76.

1.78 Är något av talen 1, 2 eller 5 ett nollställe till något av polynomen $p(x)$ och $s(x)$ i övning 1.76?

1.79 Bestäm definitionsmängden till den rationella funktionen r definierad genom

$$r(x) = \frac{4x^8 - 9x^5 + 18x^3}{x^2 - 1}.$$

1.80 Finns det rationella funktioner som inte är polynom och som har hela R som definitionsmängd? Motivera svaret.

1.81 Vissa rationella funktioner kan med hjälp av en division skrivas om efter följande modell:

$$\frac{3x^2 + x - 1}{x + 4} = 3x - 11 + \frac{43}{x + 4}$$

Den givna rationella funktionens täljare har ett gradtal som är större eller lika med nämnarens medan täljarens gradtal understiger nämnarens i den rationella funktionen längst till höger. Skriv på analogt sätt om de rationella funktionerna

a) $\dfrac{x^4 + 5x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$, b) $\dfrac{5x^3 - x^2 + 9x}{x^3 + 2x}$, c) $\dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + x + 1}$.

1.82 Betrakta $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, där a, b, c och d är konstanter. Bestäm alla sådana funktioner f för vilka det gäller att $f(f(x)) = x$ för alla $x \in D_f$.

1.83 Hur lång tid skulle det ta innan folkmängden hade i fyrdubblats i den situation som beskrivs i exempel 1.80?

1.84 Finns det några potensfunktioner som är sin egen invers? Bestäm i så fall alla dessa.

1.85 Lös ekvationen $\dfrac{\lg(4x^2 + 7)}{\lg(2x + 1)} = 2$.

1.86 Bestäm utan räknehjälmedel det exakta värdet av

a) $\log_3 \sqrt{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}$, b) $\log_5 \sqrt[3]{625}$, c) $\ln \dfrac{1}{e^2}$, d) $\ln \sqrt[4]{e^5}$.

1.87 Om $\lg x = t$, vad blir, uttryckt i t,
a) $\lg \sqrt[3]{x}$, b) $\lg \sqrt[5]{x^2}$, c) $\lg 1/x$, d) $\lg(\sqrt[3]{x}/\sqrt{x})$?

1.88 Visa att uttrycket $\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$ kan omformas till $\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{1/h}$.

1.89 En aktuell ljudintensitet I brukar jämföras med en referensintensitet I_0 genom att man anger ljudintensitetsnivån $L = 10 \lg I/I_0$. Den på detta sätt beräknade ljudintensitetsnivån sägs vara angiven i decibel (dB). Ljudintensitetsnivån ett par meter från en viss motor skall sänkas från 70 till 50 dB genom ljuddämpande åtgärder. Bestäm förhållandet mellan ljudintensiteterna före och efter åtgärderna.

1.90 Ett radioaktivt grundämne sönderfaller enligt formeln i exempel 1.84, sid. 66, där tiden t nu mäts i dagar. Bestäm värdet på sönderfallskonstanten om ämnets halveringstid är 3.8 dagar.

1.91 Om en kropp med temperaturen $T = T_0$ $°C$ placeras i ett rum med temperatur 0 så får den efter tiden t minuter temperaturen T. Då gäller Newtons avsvalningslag $T = T_0 e^{-at}$, där a är en konstant. I ett visst fall har temperaturen sjunkit från 25° till 20° på 10 minuter Efter hur lång tid ytterligare har den sjunkit till 15°?

1.92 En löntagargrupp hade vid förhandlingar blivit lovad lika många kronors löneförhöjning under två på varandra följande år. Höjningens storlek skulle vara 5% av den nuvarande lönen. När gruppens förhandlare meddelade att man istället kommit överens om 5% höjning första året och 4.9% av den då aktuella lönen året därpå blev många förgrymmade. De blev emellertid gladare när de räknat på höjningarna. Förklara varför.

1.93 Visa att för alla $x \in R$ gäller att $\cosh(-x) = \cosh x$ och $\sinh(-x) = -\sinh x$.

1.94 Visa att för alla $x \in R$ gäller att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. (Den "hyperboliska ettan".)

1.95 Visa att för alla $x \in R$ gäller $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ och $\sinh 2x = 2\cosh x \sinh x$.

1.96 Visa hur man direkt ur resultatet av Sats 1.10 sid. 70 kan få fram olikheten $\sin x > x$ för $x < 0$.

1.97 Visa hur man ur Sats 1.11, sid. 71 kan få fram olikheten $\tan x < x$ för alla $x \in (-\pi/2, 0)$.

1.98 Sats 1.10 sid. 70 gäller givetvis även om man byter ut x mot $x/2$. Utnyttja detta och vanliga trigonometriska formler för att visa olikheten $\cos x \geq 1 - x^2/2$ för alla x. För vilka x gäller likhet?

1.99 Visa att för alla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ och $x \neq 0$ gäller $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

1.100 Första gången man ritar kurvan $y = \sin^2 x$ brukar det bli fel i närheten av origo. Visa hur olikheten i Sats 1.10 kan hjälpa en att få kurvan riktig här.

1.101 Bestäm exakta värden för amplitud och fasförskjutning för
a) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$, b) $y = \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x$,
c) $y = 3\cos 8x - 3\sin 8x$.

1.102 Bestäm amplitud och fasförskjutning för

1.103 a) $y = 3.1\cos 2x + 6.2\sin 2x$, b) $y = 1.2\cos 3x - 3.7\sin 3x$
c) $y = 0.5\cos 7x + 1.2\sin 7x$.

1.104 Vad är
a) $\arccos(-1)$, b) $\arccos 1/2$, c) $\arcsin(-1)$, d) $\arcsin 1/2$,
e) $\arccos 1$, f) $\arccos 2$, g) $\arcsin 1$, h) $\arcsin 2$,
i) $\arctan 1$, j) $\arctan\sqrt{3}$?

1.105 Lös ekvationen
a) $\arccos x = \pi/4$, b) $\arcsin x = -\pi/6$,
c) $\arctan x = \pi/6$, d) $\arccos x = -\pi/6$.

1.106 Lös följande ekvationer och ange rötterna med hjälp av cyklometriska funktioner:
a) $\cos x = 5/13$, b) $\sin x = 8/9$,
c) $\tan x = 4$, d) $\cos x = 4$.

1.107 Visa att för $0 < x \leq 1$ gäller $\arccos x = \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1.108 Visa att $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ och $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$.

1.109 Använd miniräknare för att bestämma
a) $\arcsin 0.871$, b) $\arcsin 0.996$, c) $\arccos 0.510$,
d) $\arccos 0.846$, e) $\arcsin(-0.63)$, f) $\arcsin(-0.988)$,
g) $\arccos(-0.12)$, h) $\arccos(-0.849)$.

1.110 Använd miniräknare för att bestämma
a) $\arctan 0.86$, b) $\arctan 8.6$, c) $\arctan 86$,
d) $\arctan 860$, e) $\operatorname{arccot} 0.86$, f) $\operatorname{arccot} 8.6$.